CEFET-BA
Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia

NOTAS DE AULA - ESTATÍSTICA

PROBABILIDADE
DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

ISABEL C. C. LEITE

SALVADOR – BA
2007

Probabilidades

Introdução

De modo geral ao estudarmos qualquer fenômeno devemos procurar um modelo matemático que nos ajude a descrever de forma satisfatória o fenômeno apresentado. Assim, necessitamos materializar uma forma matemática para os fenômenos de observação, tais modelos matemáticos são de dois tipos: *Determinístico e Não-Determinístico*.

O Modelo determinístico é relativo aos experimentos que apresentam um resultado com um padrão matemático, ou seja, quaisquer desvios ou erros se apresentaram pequenos o suficiente para jamais alterar o modelo que com isto se torna suficiente. São exemplos: As leis da Física (Gravitacional e as de Kepler)
O Modelo Não-Determinístico (probabilístico ou estatístico) se apresenta como resultados irregulares quando analisados individualmente, ou seja, existiram desvios suficientes que podem alterar um dado comportamento de um fenômeno qualquer, mesmo que saibamos todas as possíveis respostas do experimento. São exemplos quaisquer experimentos com resultados aleatórios (jogar um dado comum, tirar uma carta de um baralho de 52 cartas, etc.).

Experimentos Aleatórios

O experimento aleatório tem sua formação num conjunto circunstancial com respostas observáveis e incertas, com três características fundamentais:

- **O experimento pode ser repetido quantas vezes desejarmos;**
- **A cada resultado individual observa-se total irregularidade dos resultados tornando-os sem previsão exata;**
- **Após uma grande repetição do experimento observamos impressionante regularidade estatística quando da análise dos dados em conjunto.**

Exemplos de experimentos aleatórios:

Observar o naipe sorteado de um baralho comum com 52 cartas;

Observar o resultado da face voltada para cima de um dado ao arremessá-lo uma vez.

Contar o número de parafusos defeituosos produzidos diariamente por uma dada máquina.

Espaço Amostral (Ω)

Ao realizarmos um experimento aleatório, o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento será chamado de *espaço amostral*.

Indicaremos o número de elementos do espaço amostral por $N(\Omega)$

Exemplo: Construa o espaço amostral (Ω) dos seguintes experimentos aleatórios:

a) Jogar um dado e observar a face voltada para cima.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $N(\Omega) = 6$

b) Lançar uma moeda e observar a face voltada para cima.
Ω = {K, C}, onde K = cara e C = coroa e $N(\Omega)$ = 2

c) Lançar uma moeda e um dado ao mesmo tempo.
Ω = {1K, 2K, 3K, 4K, 5K, 6K, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C} e $N(\Omega)$ = 12

- O espaço amostral (Ω) poderá ser finito ou infinito. Aqui veremos apenas experimentos com espaço amostral finito.

O resultado obtido quando se realiza um experimento aleatório pode ser formado por um número ou um grupo de números, um atributo ou grupo de atributos, ou, ainda, por uma combinação de aspectos quantitativos e/ou qualitativos. Assim, as características de interesses associadas a um experimento, aleatório será chamado de espaço amostral.

Na teoria das probabilidades o espaço amostral (Ω) é um termo primitivo, logo sem definição a partir de outros termos, alguns autores consideram-no mesmo inserido no conceito de experimentos aleatórios.

Eventos

Os subconjuntos de Ω são chamados eventos. Ao realizarmos um experimento aleatório diz-se que o evento A, $A \subset \Omega$ (A está contido em ômega), se realiza se o resultado é um elemento pertencente a A. A importância do espaço amostral provém sobretudo de ser o meio empregado para a definição do evento. Há, em regra, muito mais interesse nos eventos e nas famílias de eventos do que nos elementos daquele espaço.

Através das operações dos conjuntos matemáticos por todos conhecidas, poderemos sempre criar novos eventos:

1. $A \cup B$ = o evento que ocorre se A ocorre ou B ocorre ou ambos ocorrem;
2. $A \cap B$ = o evento que ocorre se A e B ocorrem;
3. A^C = o evento que ocorre se A não ocorre.

Exemplo$_1$: No lançamento de duas moedas honestas, sejam os eventos:

A = {sair exatamente uma cara e uma coroa}
B = {sair uma cara na primeira moeda}
C = {sair pelo menos uma coroa}

Ω = {KK, KC, CK, CC}

A = {KC, CK}
B = {KK, KC}
C = {KC, CK, CC}
$A \cup B$ = {KC, CK, KK}
$B \cap C$ = {KC}
A^C = {KK, CC}

Exemplo$_2$: No lançamento de dois dados ordinários, seja o evento
A = {(i, j): i + j = 5; i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Assim, seu espaço amostral (Ω) será:

(1, 1)	**(2, 1)**	**(3, 1)**	**(4, 1)**	**(5, 1)**	**(6, 1)**
(1, 2)	**(2, 2)**	**(3, 2)**	**(4, 2)**	**(5, 2)**	**(6, 2)**
(1, 3)	**(2, 3)**	**(3, 3)**	**(4, 3)**	**(5, 3)**	**(6, 3)**
(1, 4)	**(2, 4)**	**(3, 4)**	**(4, 4)**	**(5, 4)**	**(6, 4)**
(1, 5)	**(2, 5)**	**(3, 5)**	**(4, 5)**	**(5, 5)**	**(6, 5)**
(1, 6)	**(2, 6)**	**(3, 6)**	**(4, 6)**	**(5, 6)**	**(6, 6)**

A = {(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)}

Definição de Probabilidade

Clássica: "A probabilidade de um evento ocorrer é o quociente entre o número de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis, supondo todos os casos igualmente possíveis".

$$P(A) = \frac{n(A)}{N(\Omega)}$$

Empírica ou pelo enfoque da freqüência relativa:
"A probabilidade é determinada com base na proporção de vezes que ocorre um resultado favorável em um certo número de observações ou experimentos".

$$P(A) = \frac{\text{freqüência do evento } A}{\text{freqüência total}}$$

Dado um espaço amostral, Ω, a função probabilidade associa a cada evento um número real, onde:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. Se P(A) = 1, A é dito evento certo;
3. Se P(A) = 0, A é dito evento impossível.
4. Se A^C é o complemento do evento A, então $P(A^C) = 1 - P(A)$
5. Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.

Eventos Mutuamente Exclusivos

Dois eventos são mutuamente exclusivos ou disjuntos se eles não ocorrem simultaneamente, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

Se A e B forem eventos mutuamente exclusivos, então, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Teorema da Soma: Se A e B são dois eventos quaisquer, então:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Obs.:

- Quando associamos a cada ponto do espaço amostral a mesma probabilidade, o espaço amostral será denominado equiprovável.

- Podemos representar a probabilidade como fração própria, número decimal ou percentual.

Exemplo$_3$: Qual é a probabilidade de um número ímpar aparecer quando jogamos um dado ?

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
A = {aparecer um número ímpar} = {1, 3, 5}
P{aparecer um número ímpar} = $\dfrac{n(A)}{N(\Omega)}$
P{aparecer um número ímpar} = $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

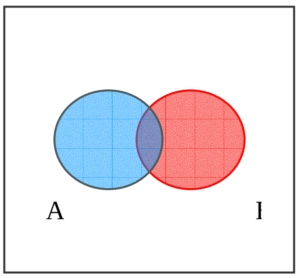
Exemplo$_4$: Qual é a probabilidade de uma “cara” aparecer ao jogarmos uma moeda não viciada?

$\Omega = \{K, C\}$
A = {uma “cara” aparece} = {K}
P{uma “cara” aparece} = $\dfrac{1}{2}$

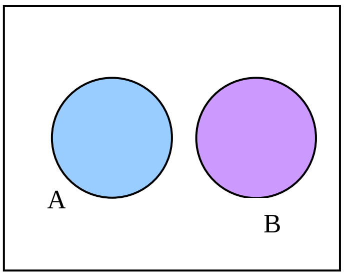
Exemplo$_5$: Ao retirar uma carta do baralho, os eventos “ás” e “espadas” não são mutuamente exclusivos. A probabilidade de retirar um ás (A) ou uma espada (E), ou ambos, em só uma tentativa, pelo teorema da soma, é

$$P(A \cup E) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

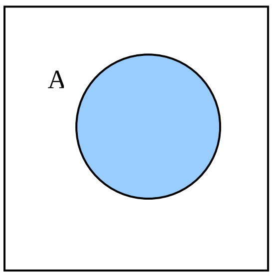
Diagramas de Venn



A e B não exclusivos



A e B mutuamente exclusivos



$P(A) + P(A^C) = 1$

Probabilidade Condicional e Independência

Probabilidade Condicional

Seja B um evento arbitrário compondo um espaço amostral Ω, onde P(B) > 0 por já ter ocorrido. Uma vez que B já ocorreu, a probabilidade de um outro evento A ocorrer dado que o evento B tenha ocorrido será dada pela seguinte probabilidade condicional, definido por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Analogamente, a probabilidade de ocorrer o evento B tendo já ocorrido o evento A:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$; (neste caso P(A) > 0 , pois o evento A já ocorreu)

<u>*Teorema*</u>: Seja Ω um espaço finito equiprovável composto pelos eventos A e B. Assim,

$$P(A / B) = \frac{\text{Número de elementos em } (A \cap B)}{\text{Número de elementos em B}}$$

Exemplo$_6$: Dois dados não viciados são lançados.
a)Se a soma dos resultados apresentados pelos dados foi 5, qual é a probabilidade de ter ocorrido a face 2 em um deles ?

b) Se uma face 2 ocorreu, qual é a probabilidade da soma dos dados ser 5 ?

<u>Solução</u>: O espaço amostral Ω é o mesmo do exemplo$_2$, onde $N(\Omega) = 36$.
Sejam B = {soma 5} = {(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)} e
A = {ocorre a face 2} = {(1,2); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 2); (4, 2); (5, 2); (6, 2)}
$A \cap B$ = {(2, 3); (3, 2)}
$P(A \cap B) = 2/36$, $P(B) = 4/36$, $P(A) = 11/36$

a) Desejamos saber a probabilidade de A tendo ocorrido B:

$$P(A/B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{2}$$

b) Neste caso desejamos saber a probabilidade de B tendo ocorrido A:

$$P(B/A) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

Teorema do Produto

Este teorema pode ser dado a partir do enunciado de probabilidade Condicional:

"A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos, A e B do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro". Assim:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$
$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)$$

Independência Estatística

Um evento A é considerado independente de um outro evento B se a probabilidade de A é igual à probabilidade condicional de A dado B, isto é,

$$P(A) = P(A/B)$$

e, é evidente que, se A é independente de B, B também o é em relação a A, assim:

$$P(B) = P(B/A)$$

Considerando o teorema do produto, podemos afirmar que sempre que A e B são independentes, teremos como relação:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Assim, dados *n* eventos, diremos que eles serão independentes, se o forem 2 a 2, 3 a 3, ..., *n* a *n*.

Exemplo$_7$: Dois diferentes departamentos de produção de uma grande empresa são: Produtos Marítimos (M) e Equipamentos para Oficinas (O). A probabilidade de que a divisão de Produtos Marítimos tenha, no corrente ano fiscal, uma margem de lucros de no mínimo 10% é estimada em 0,30; a probabilidade de que a divisão de Equipamentos para Oficinas tenha uma margem de lucros de pelo menos 10% é 0,20; e a probabilidade de que ambas as divisões tenham uma margem de lucro de no mínimo 10% é 0,06.

a) Determinar a probabilidade de que a divisão de Equipamentos para Oficinas tenha uma margem de lucro no mínimo de 10% dado que a divisão de Produtos Marítimos tenha alcançado tal nível de lucro.
b) Aplicar um teste apropriado para determinar se a consecução das metas de lucro nas duas divisões é estatisticamente independente.

Solução: a) $P(O/M)=\frac{P(O\cap M)}{P(M)}=\frac{0,06}{0,30}=0,20$

b) $P(O)\overset{?}{=}P(O/M)$. Uma vez que 0,20 = 0,20, os dois eventos são independentes.

Análise Combinatória

Pelo enfoque clássico para determinar as probabilidades devemos conhecer o número de resultados igualmente prováveis que são favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis. Quando os problemas são simples, estes números podem ser diretamente contados. Contudo, para problemas mais complexos é necessária a teoria da análise combinatória para determinar o número de tais resultados possíveis.

Permutações

O número de permutações de *n* objetos é o número de maneiras pelas quais os objetos podem ser arrumados em termos de ordem:

$$\text{Permutações de } n \text{ objetos} = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

O símbolo $n!$ é lido "*n* fatorial". Em problemas de permutações e combinações n é sempre positivo. Matematicamente, 0! = 1, por definição.

Exemplo$_8$: Três membros de uma organização social se oferecem como voluntários para comporem a diretoria para o próximo ano, assumindo as funções de Presidente, Secretário e Tesoureiro. O número de maneiras (permutações) pelas quais os três podem assumir tais cargos é:

$$n! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ maneiras}$$

Arranjos

Geralmente estamos interessados no número de permutações de algum subgrupo dos *n* objetos, e não em todos os *n* objetos. Isto é, dizemos que estamos interessados no número de arranjos de *n* objetos tomados *r* de cada vez, onde $r < n$:

$$A_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

No exemplo$_8$, suponha que existem 10 membros na organização social e que nenhuma indicação haja sido feita para os cargos de Presidente, Secretário e Tesoureiro. O número de diferentes disposições de três diretores eleitos entre os 10 membros do clube é:

$$A_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

Combinações

No caso das permutações e arranjos é importante a ordem na qual estão dispostos os objetos. No caso das combinações interessa-nos o número de diferentes agrupamentos que se podem formar com os *n* objetos *sem* levar em consideração a ordem. Por conseguinte, o número de combinações de *n* objetos tomados *r* de cada vez é:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

A combinação de *n* objetos tomados *r* de cada vez é também representada por $\binom{n}{r}$.

Exemplo$_9$: Suponhamos que três membros de uma pequena organização social de 10 membros vão ser escolhidos para formar uma comissão. O número de diferentes grupos de três pessoas que podem ser formados, sem ter em conta as diferentes ordens em que cada indivíduo poderia ser escolhido, é:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

Tendo concluído esta revisão dos conceitos básicos da análise combinatória, vejamos a sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Exemplo$_{10}$: Continuando o exemplo$_9$, se o grupo contém seis mulheres e quatro homens, qual a probabilidade de que uma comissão escolhida aleatoriamente seja composta de duas mulheres e um homem?
A abordagem fundamental é determinar o número de combinações de resultados que contêm exatamente duas mulheres (das seis mulheres) e um homem (dos quatro homens), e então tomar a razão deste número para o total de combinações.

Número de comissões com 2M e 1H = $C_{6,2}\cdot C_{4,1}$

$$= \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{1!\cdot 3!} = 15\cdot 4 = 60$$

Número total de comissões possíveis = $C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$

$$\text{P(2M e 1H)} = \frac{C_{6,2}\cdot C_{4,1}}{C_{10,3}} = \frac{60}{120} = 0{,}5$$

No exemplo$_{10}$ foi usado o *princípio da multiplicação para resultados seqüenciais*. Em geral, se um evento pode ocorrer de n_1 maneiras e um segundo evento pode ocorrer de n_2 maneiras, então:

Total do nº de maneiras em que os dois eventos podem ocorrer em combinação = $n_1\cdot n_2$

Exemplo$_{11}$: Num lote de 6 peças 4 são perfeitas; duas são retiradas aleatoriamente. Calcule:
a) A probabilidade de ambas serem defeituosas;
b) A probabilidade de pelo menos uma peça ser perfeita.

a) P(ambas defeituosas) = $\dfrac{C_{2,2}}{C_{6,2}} = \dfrac{\frac{2!}{2!\cdot 0!}}{\frac{6!}{2!\cdot 4!}} = \dfrac{1}{15}$

b) P(pelo menos uma perfeita) = 1 – P(ambas defeituosas) = $1-\dfrac{1}{15} = \dfrac{14}{15}$

Exercícios

1. Qual é a probabilidade de tirarmos a carta de número 3 de um grupo de 10 cartas numeradas de 1 até 10? Resp: 1/10

2. Com relação ao problema anterior, qual é a probabilidade de sacarmos uma carta de número par? Resp: 1/2

3. Dois dados não viciados são jogados. Qual é a probabilidade de que o primeiro resultado seja maior do que o do segundo dado? Resp: 5/12

4. Três Cavalos A, B e C, estão numa corrida; A é duas vezes mais provável de ganhar do que B e B é duas vezes mais provável do que C. Responda: Quais são as probabilidades de vitória de cada um? Qual é a probabilidade de que B ou C ganhe a corrida?
Resp: P(A) = 4/7, P(B) = 2/7 e P(C) = 1/7; P(B ou C) = 3/7

5. Três gatinhos caçam um pobre ratinho acuado em uma sala. Considere que o infeliz ratinho não escapará em hipótese nenhuma e que apenas um dos gatinhos irá devorá-lo, sabendo que o gatinho mais velho é três vezes mais provável de levar o quitute ao estômago em relação ao gatinho intermediário, e este quatro vezes mais provável de levá-lo ao estômago que o gatinho mais novo. Responda: a) Quais são as probabilidades de caçar o ratinho de cada gatinho? b) Qual é a probabilidade do gatinho intermediário ou do gatinho mais novo caçar o ratinho? c) Qual é a probabilidade de qualquer um dos gatinhos sair-se bem sucedido da empreitada? Justifique este último resultado.
Resp: a) P(Velho) = 12/17, P(Int.) = 4/17, P(Novo) = 1/17; b) 5/17; c) 1 ou 100%

6. Dada uma urna contendo 2 bolas brancas, 4 vermelhas e 6 amarelas e retirando apenas uma bola desta urna, encontre a probabilidade de: a) Escolhermos uma bola qualquer da urna? b) Escolhermos uma bola branca? c) Escolhermos uma bola vermelha? d) Escolhermos uma bola amarela da urna?
Resp: a) 1; b) 1/6; c) 1/3; d) 1/2

7. Três lâmpadas são escolhidas aleatoriamente dentre 15 lâmpadas, das quais 5 são defeituosas. Encontre a probabilidade de que: a) nenhuma seja defeituosa; b) exatamente uma seja defeituosa; c) pelo menos uma seja defeituosa.
Resp: a) 24/91; b) 45/91; c) 67/91

8. Duas cartas são selecionadas aleatoriamente dentre 10 cartas numeradas de 1 a 10. Encontre a probabilidade de que a soma seja ímpar: a) se as duas cartas são retiradas juntas; b) se as duas cartas são retiradas uma após a outra sem reposição; c) se as duas cartas são retiradas uma após a outra com reposição. Resp: a)5/9; b) 5/9; c) 1/2

9. Numa classe há 10 homens e 20 mulheres; a metade dos homens e a metade das mulheres têm olhos castanhos. Ache a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso ter olhos castanhos ou ser homem.
Resp.: 2/3

10. Das 10 alunas de uma classe, 3 têm olhos azuis. Se duas delas são escolhidas aleatoriamente, qual é a probabilidade de (a) ambas terem olhos azuis; (b) nenhuma ter olhos azuis; (c) Pelo menos uma ter olhos azuis. Resp.: a) 1/15; b) 7/15; c) 8/15

11. Dez estudantes A, B, C, ..., estão numa classe. Se uma comissão de 3 é escolhida aleatoriamente, encontre a probabilidade de:
    a) “A” pertencer à comissão;
    b) “B” pertencer à comissão;
    c) “A e B” pertencerem à comissão;
    d) “A ou B” pertencerem à comissão.

    Resp.: a) 3/10; b) 3/10; c) 1/15; d) 8/15

12. Lança-se um par de dados não viciados. Ache a probabilidade de a soma das faces dos dados ser maior ou igual a 10, se a) ocorrer 5 no primeiro dado; b) ocorrer 5 em pelo menos um dos dados.
Resp.: a) 1/3 ; b) 3/11

13. Lançam-se três moedas não viciadas. Encontre a probabilidade de ocorrer cara em todas elas, se a) ocorre cara na primeira moeda; b) ocorre cara numa das moedas. Resp.: a) 1/4; b) 1/7.

14. Em certo colégio 25% dos estudantes foram reprovados em matemática, 15% e química e 10% em matemática e química ao mesmo tempo. Um estudante é selecionado aleatoriamente.
    a) Se ele foi reprovado em química, qual é a probabilidade dele Ter sido reprovado em matemática ?
    b) Se ele foi reprovado em matemática, qual é a probabilidade dele ter sido reprovado em química ?
    c) Qual é a probabilidade dele ter sido reprovado em matemática ou química ?
    d) Qual é a probabilidade dele não ter sido reprovado nem em matemática nem em química ?
Resp.: a) 2/3; b) 2/5; c) 3/10; d) 7/10

15. Uma urna possui 8 objetos dos quais 3 são defeituosos. São escolhidos aleatoriamente 4 objetos. Pergunta-se: a) Qual é a probabilidade dos 4 serem perfeitos; b) pelo menos um ser defeituoso; c) pelo menos dois serem defeituosos; d) Se é sabido que um objeto defeituoso foi sorteado, qual é a probabilidade de sairem mais dois defeituosos?
Resp.: a) 1/14; b)13/14; c)1/2; d)1/7

16. Lança-se um par de dados não viciados. Se ocorrem dois números diferentes, encontre a probabilidade de: a) a soma ser 6; b) de ocorrer um 1; c) a soma ser menor ou igual a 4.
Resp.: a) 2/15; b) 1/3 ; c) 2/15.

17. Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas e 2 peças são retiradas uma após a outra sem reposição. a) Qual a probabilidade de que ambas sejam boas? b) Qual a probabilidade de que ambas sejam defeituosas?
Resp: a) 14/33, b) 1/11

18. Lança-se uma moeda viciada de modo que P(cara) = 2/3 e a P(coroa) = 1/3. Se aparecer cara, então se seleciona aleatoriamente um número dentre os de 1 a 9; se aparecer coroa, seleciona-se aleatoriamente um número dentre os de 1 a 5. Ache a probabilidade de um número par ser selecionado. Resp: 58/135

19. A probabilidade de dois competidores em um torneio de tiro ao alvo é dada da seguinte maneira: o atirador A acerta o alvo com probabilidade de 1/4, enquanto o atirador B, com 2/5. a) Qual é a probabilidade de ambos acertarem o alvo? b) Qual é a probabilidade de pelo menos um errar o alvo? c) Qual é a probabilidade A errar e B acertar o alvo? d) Qual é a probabilidade A errar ou B acertar o alvo?
Resp: a) 1/10; b)9/10; c)3/10; d)17/20.

20. A probabilidade de um homem viver mais dez anos é 1/4 e a probabilidade de sua esposa viver mais dez anos é 1/3. Encontre a probabilidade de a) ambos estarem vivos dentro de dez anos; b) ao menos um estar vivo dentro de dez anos; c) nenhum estar vivo dentro de dez anos; d) somente a esposa estar viva dentro de dez anos. Resp.: a) 1/12; b) ½; c) ½; d) ¼.

21. Sendo o espaço amostra Ω = {1, 2, 3, 4 } equiprovável e A = {1, 2}; B = {1, 3}; C = {1, 4} três eventos de Ω. Verificar se os eventos A, B e C são independentes.
Resp.: Não, pois são independentes dois a dois, mas não os três juntos.
$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

VARIÁVEL ALEATÓRIA é aquela cujos valores são determinados por processos acidentais, ao acaso, que não estão sob o controle do observador.

TIPOS:

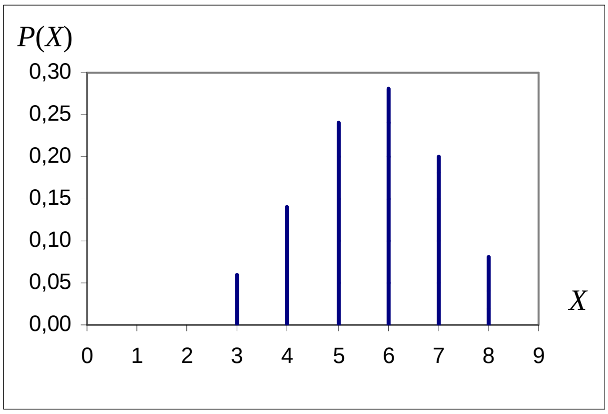
- DISCRETA – se o número de resultados possíveis é finito ou pode ser contado.
  Variáveis aleatórias discretas são determinadas por uma contagem.

- CONTÍNUA – se pode assumir qualquer valor dentro de determinado intervalo. O número de resultados possíveis não pode ser listado.
  Variáveis aleatórias contínuas são determinadas por uma medição.

DISTRIBUIÇÃO DISCRETA DE PROBABILIDADE – enumera cada valor possível da variável aleatória, bem como sua probabilidade.

Exemplo: Demanda diária de aluguel de caminhonetes durante um período de 50 dias

Demanda possível (X)	Nº de dias	Probabilidade $P(X)$
3	3	0,06
4	7	0,14
5	12	0,24
6	14	0,28
7	10	0,20
8	4	0,08
	50	1,00



$P(X)$ é denominada **função de probabilidade** ou de freqüência de X.

Propriedades

- Cada probabilidade precisa estar entre 0 e 1, inclusive.

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

- A soma de todas as probabilidades é 1.

$$\sum P(X) = 1$$

ESPERANÇA, VALOR ESPERADO OU MÉDIA - representado por $E(X)$ ou μ

É o valor médio que resulta das inúmeras observações de uma variável aleatória.
É uma média ponderada de todos os valores possíveis de *X*. O peso, ou ponderação, de cada valor é igual à probabilidade de *X* assumir esse valor.

$$E(X) = \sum X \cdot P(X)$$

Ex: Considerando a distribuição de probabilidade do exemplo anterior,

Demanda possível (*X*)	Probabilidade *P*(*X*)	Valor ponderado *XP*(*X*)
3	0,06	0,18
4	0,14	0,56
5	0,24	1,20
6	0,28	1,68
7	0,20	1,40
8	0,08	0,64
	1,00	*E*(*X*) = 5,66

VARIÂNCIA – representada por *Var*(*X*) ou σ^2

Medida de dispersão de uma variável aleatória *X* calculada em relação a *E*(*X*).

$$Var(X) = \sum (X - E(X))^2 \cdot P(X)$$

ou

$$Var(X) = \sum X^2 P(X) - \left[\sum XP(X)\right]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

DESVIO PADRÃO – $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Demanda possível (*X*)	Probabilidade *P*(*X*)	Valor ponderado *XP*(*X*)	X^2	$X^2 \cdot P(X)$
3	0,06	0,18	9	0,54
4	0,14	0,56	16	2,24
5	0,24	1,20	25	6,00
6	0,28	1,68	36	10,08
7	0,20	1,40	49	9,80
8	0,08	0,64	64	5,12
	1,00	*E*(*X*) = 5,66		$E(X^2) = 33{,}78$

$Var(X) = 33{,}78 - (5{,}66)^2 = 1{,}74$

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Se p é a probabilidade de um evento acontecer em uma tentativa única (possibilidade de sucesso) e $q = 1 - p$ é a de que o evento não ocorra em qualquer tentativa única (possibilidade de insucesso), então a probabilidade do evento ocorrer exatamente X vezes, em N tentativas (isto é, de que haja X sucessos e $N - X$ insucessos), é dada por:

$$P(X) = C_{N,X}\, p^X q^{N-X}$$

$$= \frac{N!}{X!(N-X)!} p^X q^{N-X} \quad \text{em que } X = 0, 1, 2, ..., N.$$

Ex$_1$: Uma moeda não viciada é lançada 6 vezes, ou equivalentemente, seis moedas são lançadas; chamemos cara de sucesso.
a) Qual é a probabilidade de exatamente duas caras ocorrerem?
b) Qual é a probabilidade de ocorrerem pelo menos 4 caras?
c) Qual é a probabilidade de não ocorrerem caras?
d) Qual é a probabilidade de ocorrer pelos menos uma cara?

a) $P(2) = \frac{6!}{2!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{64}$

b) $P(X \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6)$

$$= \frac{6!}{4!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{6!}{5!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{6!}{6!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64}$$

c) $P(0) = \frac{6!}{0!6!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{6-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{64}\right)$

d) $P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

Construindo uma tabela de distribuição binomial para o número de caras em seis lançamentos de uma moeda não viciada:

Número de caras X	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade $P(X)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

Ex$_2$: Um dado não viciado é lançado 7 vezes; chamemos de sucesso a ocorrência de um 5 ou um 6. Então, determine a probabilidade de:
a) Ocorrer 5 ou 6 exatamente 3 vezes;
b) Um 5 ou um 6 nunca ocorrer;
c) Um 5 ou um 6 ocorrer pelo menos uma vez:

a) $P[5\,ou\,6, X = 3] = \dfrac{7!}{3!4!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{560}{2187}$

c) $P(5\,ou\,6, X \geq 1) = 1 - P(0) = \dfrac{2059}{2187}$

b) $P[5\,ou\,6, X = 0] = \dfrac{7!}{0!7!}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^7 = \dfrac{128}{2187}$

A distribuição binomial é também chamada de distribuição de Bernoulli.

O valor esperado (média) e a variância para uma dada distribuição binomial poderiam ser determinados listando-se a distribuição de probabilidade em uma tabela e aplicando as fórmulas já apresentadas anteriormente. Contudo, a distribuição binominal apresenta as seguintes propriedades:

Valor esperado ou média	$E(X) = N\,p$
Variância	$Var(X) = N\,p\,q$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{Npq}$

Ex$_3$: A probabilidade de que um possível cliente realize uma compra é 0,20. O valor esperado de vendas e o desvio padrão associado com a visita de 15 possíveis clientes são:

$$E(X) = 15 \cdot 0{,}20 = 3 \text{ vendas}$$
$$\sigma = \sqrt{15 \cdot 0{,}20 \cdot 0{,}80} = 1{,}55$$

Observações importantes:

- Uma distribuição binomial fica caracterizada pelos parâmetros *N* e *p*.
- Se *N* for pequeno, os cálculos serão relativamente fáceis. Contudo, se *N* for relativamente grande, os cálculos tornam-se cansativos. Felizmente dispomos de calculadoras, tabelas apropriadas, e também poderemos aproximar a distribuição binomial pela de Poisson, como veremos a seguir.
- Para qualquer *N*, a distribuição será
    - simétrica: se $p = q = 0{,}5$
    - assimétrica à direita, se $p > q$
    - assimétrica à esquerda, se $p < q$.

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A distribuição de Poisson pode ser usada para determinar a probabilidade de um dado número de sucessos quando os eventos ocorrem em um continuum de tempo ou de espaço, ao invés de ocorrerem em tentativas ou observações fixadas como na distribuição binomial.

Exemplos:

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo.
- Defeitos por unidade de área.
- Acidentes por unidade de tempo.
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo.
- Número de glóbulos vermelhos visíveis ao microscópio por unidade de área.

A expressão que dá a probabilidade de X sucessos em um intervalo t (tempo, área,...) é:

$$P(X,t) = \frac{(\lambda t)^X \cdot e^{-\lambda t}}{X!}$$

onde:
λ = coeficiente de proporcionalidade, ou taxa de freqüência por unidade de tempo, área,
t = tempo, área,
e = base dos logaritmos naturais (2,71828)
X = número de ocorrências (sucessos)

Considerando que a média da distribuição é dada por λt, ou seja, $\mu = \lambda t$, temos:

$$P(X,t) = \frac{\mu^X \cdot e^{-\mu}}{X!}$$

Temos para a distribuição de Poisson

Valor esperado ou média	$E(X)$ ou $\mu = \lambda t$
Variância	$Var(X) = \mu = \lambda t$
Desvio padrão	$\sigma = \sqrt{\lambda t}$

Ex$_1$: Um departamento de consertos de máquinas recebe uma média de duas chamadas por hora. Vamos calcular as probabilidades de, em uma hora, este departamento receber: nenhuma chamada, uma, duas, três, ...

Temos: t = 1 hora, $\mu = 2$

Nenhuma chamada:

$$P(X = 0,1) = \frac{2^0 \cdot e^{-2}}{0!} = 0,1353$$

Uma chamada: $P(X = 1,1) = \frac{2^1 \cdot e^{-2}}{1!} = 0,2706$

Duas chamadas:

$$P(X = 2,1) = \frac{2^2 \cdot e^{-2}}{2!} = 0,2706$$

Três chamadas: $P(X = 3,1) = \frac{2^3 \cdot e^{-2}}{3!} = 0,1804$

Quatro chamadas:
$P(X=4,1)=\dfrac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!}=0{,}0902$

Cinco chamadas:
$P(X=5,1)=\dfrac{2^5 \cdot e^{-2}}{5!}=0{,}0361$

Seis chamadas: $P(X=6,1)=\dfrac{2^6 \cdot e^{-2}}{6!}=0{,}0120$

Sete chamadas: $P(X=7,1)=\dfrac{2^7 \cdot e^{-2}}{7!}=0{,}0034$

Oito chamadas: $P(X=8,1)=\dfrac{2^8 \cdot e^{-2}}{8!}=0{,}0009$

Nove chamadas:
$P(X=9,1)=\dfrac{2^9 \cdot e^{-2}}{9!}=0{,}0002$

Observe que $\sum_{i=0}^{9} P(X_i)=0{,}9997 \cong 1$. Este resultado é explicado, pois *X*, número de sucessos, teoricamente, tende ao infinito. Neste caso, o infinito foi atingido para *X* = 9.
Temos ainda as medidas:
$E(X)=2$
$Var(X) = 2$
$\sigma=\sqrt{2}=1{,}4142$

Ex$_2$: O pessoal de inspeção de qualidade afirma que os rolos de fita isolante apresentam, em média, uma emenda a cada 50 metros. Admitindo que a distribuição do número de emendas é dada pela Poisson, vamos calcular as probabilidades:

a) de nenhuma emenda em um rolo de 125 metros:
$\mu=\lambda t \quad \Rightarrow \quad 1=\lambda \cdot 50 \quad \Rightarrow \lambda=1/50$
para t = 125 m temos $\lambda t=\dfrac{1}{50}\cdot 125=2{,}5$
$P(X=0,\,125)=\dfrac{2{,}5^0 \cdot e^{-2,5}}{0!}=0{,}0821 \; ou \; 8{,}21\%$

b) de ocorrerem no máximo duas emendas em um rolo de 125 metros:
$P(X \le 2,\,125)=P(0)+P(1)+P(2)=0{,}0821+\dfrac{2{,}5^1 \cdot e^{-2,5}}{1!}+\dfrac{2{,}5^2 \cdot e^{-2,5}}{2!}$
$=0{,}0821+0{,}2053+0{,}2566=0{,}5440 \; ou \; 54{,}40\%$

c) de ocorrer pelo menos uma emenda em um rolo de 100 metros:
para t = 100 m temos $\lambda t=\dfrac{1}{50}\cdot 100=2$
$P(X \ge 1,\,100)=P(1)+P(2)+P(3)+\ldots$
$=1-P(0)$
$=1-e^{-2}=0{,}8647 \; ou \; 86{,}47\%$

APROXIMAÇÃO DAS PROBABILIDADES BINOMIAIS COM AS PROBABILIDADES DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Na aplicação do modelo de distribuição binomial, quando N for grande ($N > 50$) e $Np < 5$, é possível obter as probabilidades binomiais por meio do modelo de Poisson.
A média da distribuição de probabilidade de Poisson utilizada como aproximação das probabilidades binomiais é:

$$\mu = Np$$

Ex$_3$: Em um cruzamento de duas avenidas de tráfego intenso, a probabilidade de um carro sofrer acidente é de 0,0001. Se entre as 17 h e 19 h passam 1000 veículos nesse cruzamento, qual é a probabilidade de que dois ou mais acidentes ocorram durante esse período?

Solução pela distribuição binomial:
p = 0,0001,   N = 1.000, q = 0,9999

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{1000!}{0!1000!} \cdot (0{,}0001)^0 \cdot (0{,}9999)^{1000} + \frac{1000!}{1!999!} \cdot (0{,}0001)^1 \cdot (0{,}9999)^{999} \right]$$

É evidente que o cálculo deste resultado é muito trabalhoso.
Como $N > 50$ e $Np = 0{,}1 < 5$, podemos obter o resultado desejado pelo modelo de Poisson.
Assim, $\mu = Np = 1000 \cdot 0{,}0001 = 0{,}1$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[\frac{(0{,}1)^0 \cdot e^{-0{,}1}}{0!} + \frac{(0{,}1)^1 \cdot e^{-0{,}1}}{1!} \right] = 0{,}0047 \ ou \ 0{,}47\%$$

EXERCÍCIOS – DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

1. O número de caminhões que chegam, por hora, a um depósito segue a distribuição de probabilidade da tabela abaixo. Calcular (a) o número esperado de chegadas por hora e (b) a variância e desvio padrão desta distribuição de probabilidade.

Nº de caminhões X	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade $P(X)$	0,05	0,10	0,15	0,25	0,30	0,10	0,05

2. Construir a tabela e o gráfico da distribuição de probabilidade para a variável aleatória: número de coroas obtidas no lançamento de duas moedas.

3. Um homem de vendas calcula que cada contato resulta em venda com probabilidade de 20%. Certo dia, ele contata dois possíveis clientes. a) Construir a tabela de distribuição de probabilidade para a variável X: número de clientes que assinam um contrato de vendas. b) Calcular a número esperado de clientes que assinam um contrato de vendas, a variância e o desvio padrão desta distribuição.

4. O número de chamadas telefônicas recebidas por uma central e suas respectivas probabilidades para um intervalo de um minuto são:

Número de chamadas (X)	0	1	2	3	4	5
Probabilidades $P(X)$	0,55	0,25	0,10	0,04	0,04	0,02

   a) Determinar $P(1 \leq X \leq 4)$ e $P(X > 1)$.
   b) Qual é o número esperado de chamadas em 1 minuto?
   c) Sendo o coeficiente de variação o quociente entre o desvio padrão e a média, avalie o coeficiente de variação para esta distribuição.

5. Em uma sala, temos cinco rapazes e quatro moças. São escolhidas aleatoriamente três pessoas. Fazer X a variável aleatória: número de rapazes. a) Construir a tabela de distribuição de probabilidade da variável X. b) Determinar a probabilidade do grupo escolhido ter no máximo dois rapazes.

6. Admitindo que os nascimentos de meninos e meninas sejam iguais, calcular a probabilidade de um casal com seis filhos ter quatro filhos homens e duas mulheres.

7. Em 320 famílias com quatro crianças cada uma, em quantas famílias seria esperado que tivessem: a) nenhuma menina? b) três meninos? c) quatro meninos?

8. Um time Y tem $\frac{2}{3}$ de probabilidade de vitória sempre que joga. Se Y jogar cinco partidas, calcule a probabilidade de Y vencer: a) exatamente três partidas; b) ao menos uma partida; c) mais da metade das partidas.

9. Devido às altas taxas de juros, uma firma informa que 30% de suas contas a receber de outras firmas comerciais se encontram vencidas. Se um contador escolhe aleatoriamente uma amostra

de cinco contas, determinar a probabilidade de: a) nenhuma das contas estar vencida; b) a maioria das contas estarem vencidas; c) exatamente 20% das contas estarem vencidas.

10. Uma fábrica de pneus verificou que, ao testar seus pneus nas pistas, havia em média um estouro de pneu a cada 5.000 km. Qual a probabilidade de que
    a. num teste de 3.000 km haja no máximo um pneu estourado?
    b. um carro ande 8.000 km sem estourar nenhum pneu?

11. Certo posto de bombeiros recebe em média três chamadas por dia. Calcular a probabilidade de:
    a. receber quatro chamadas num dia;
    b. receber três ou mais chamadas num dia.

12. Suponha que haja em média dois suicídios por ano numa população de 50.000 habitantes. Em cada cidade de 100.000 habitantes, determine a probabilidade de que em dado ano tenha havido: a) nenhum; b) um; c) dois; d) dois ou mais suicídios.

13. Certa loja recebe em média cinco clientes por hora. Qual a probabilidade de receber: a) dois clientes em 24 minutos? b) pelo menos três clientes em 18 minutos?

14. Uma amostra aleatória de 230 pessoas é selecionada. Cada indivíduo da amostra responde se prefere um PC ou um VCR. Assumindo que 3% do público prefere um PC, determinar, aproximadamente, a probabilidade de um grupo de 10 pessoas preferir PC.

15. Se a probabilidade de um indivíduo sofrer uma reação nociva, resultante da injeção de um determinado soro, é 0,001, determinar a probabilidade de, entre 2000 indivíduos: a) exatamente três; b) mais do que dois, sofrerem aquela reação.

16. Uma companhia de seguros está considerando a cobertura de uma doença relativamente rara na área geral de seguros médicos. A probabilidade de que um indivíduo selecionado aleatoriamente venha a contrair a doença é 0,001, sendo que 3.000 pessoas são incluídas no grupo segurado.
    a. Qual o número esperado de pessoas, no grupo, que terão a doença?
    b. Qual a probabilidade de que nenhuma das 3.000 pessoas do grupo contraia a doença?

Respostas.

1. a) 3,15 b) Var(X) $\cong$ 2,13 e $\sigma = 1{,}46$

2.

X	0	1	2
$P(X)$	0,25	0,50	0,25

3. a)

X	0	1	2
$P(X)$	0,64	0,32	0,04

3. b) $E(X)$ = 0,40 c) Var(X) = 0,32 e $\sigma = 0{,}56$ 4. a) 0,43 e 0,20 b) 0,83 c) 145,8%

5. a)

X	0	1	2	3
$P(X)$	1/21	5/14	10/21	5/42

b) 37/42

6. 15/64 7. a) 20 b) 80 c) 20 8. a) 80/243 b) 242/243 c) 64/81

9. a) $P(0) = 0{,}1681$ b) $P(X \geq 3) = 0{,}1631$ c) $P(1) = 0{,}3602$

10. a) 0,8784 b) 0,2020 11. a) 0,1680 b) 0,5767

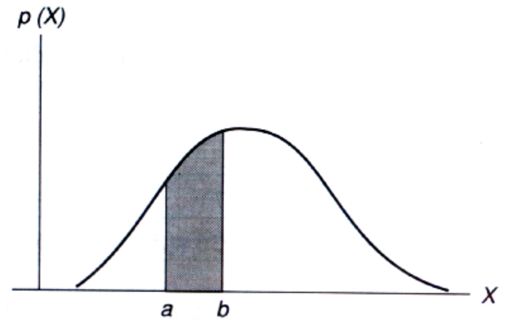
12. a) 0,0183 b) 0,0732 c) 0,1464 d) 0,9085 13. a) 0,2707 b) 0,1912

14. a) 0,0679 15. a) 0,180 b) 0,323 16. a) 3 pessoas b) 0,0498

DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE PROBABILIDADE

A variável aleatória X é contínua e por isso não é possível enumerar todos os seus possíveis valores.
É representada por uma curva contínua, a curva de probabilidade, cuja equação é $Y = P(X)$.

- $P(X)$ é denominada função densidade de probabilidade.
- A área total limitada por essa curva e os eixo dos X é igual a 1.
- A área compreendida entre as verticais $X = a$ e $X = b$ (sombreada na figura) dá a probabilidade de X ser um valor entre a e b. $P(a \leq X \leq B)$



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A distribuição ou curva normal (de Gauss) é definida como segue:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ,$$

onde: $-\infty < X < \infty$

μ = média da distribuição

σ = desvio padrão da distribuição

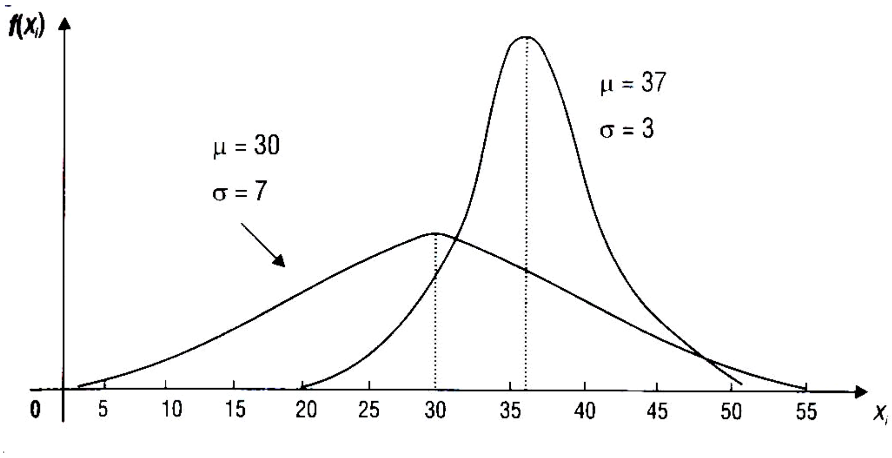
$\pi = 3{,}1416...$.

$e = 2{,}71828...$

Esta função é certamente um dos exemplos mais importantes de distribuição de probabilidade contínua. Cada distribuição normal fica determinada pelos parâmetros μ (média) e σ (desvio padrão).

Notação: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$

As duas curvas abaixo mostram as mudanças na função onde μ e σ variam. Em particular, observe que estas curvas em forma de sino são simétricas em torno de $X = \mu$. Possui um ponto de máximo para $X = \mu$ e $f(X)$ tende a zero quando X tende para $\pm\infty$.



VARIÁVEL NORMAL PADRONIZADA

Sendo X uma variável aleatória com distribuição $N(\mu,\sigma^2)$, quando $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ temos uma distribuição padrão ou reduzida, ou brevemente $N(0,1)$.
Assim a função densidade reduz-se a

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty$$

onde a variável Z é obtida pela transformação linear:

$$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

A notação usada é $Z \cong N(0,1)$ que tem distribuição normal de média zero e variância 1.

TABELA DE CURVA NORMAL

Há vários tipos de tabelas que nos oferecem as áreas (probabilidades) sob a curva normal. O tipo mais freqüente é a tabela da faixa central. A tabela da faixa central dá a área sob a curva normal padrão entre $Z = 0$ e qualquer valor positivo de Z.

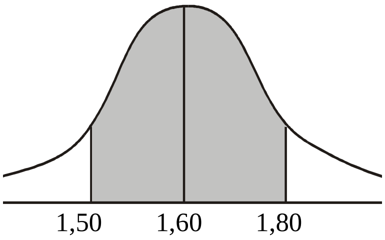
Exemplo: As alturas dos alunos de uma determinada escola são normalmente distribuídas com média 1,60 m e desvio padrão 0,30 m. Encontre a probabilidade de um aluno medir:

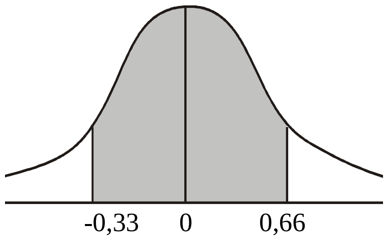
a) entre 1,50 m e 1,80 m;
b) mais de 1,75 m;
c) menos de 1,48 m;
d) qual deve ser a medida mínima para escolhermos 10% dos mais altos?

μ = 1,60 m
σ = 0,30 m

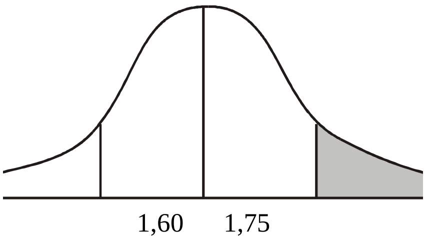
a) $Z_1 = \dfrac{1{,}50 - 1{,}60}{0{,}30} = -0{,}33$ e $Z_2 = \dfrac{1{,}80 - 1{,}60}{0{,}30} = 0{,}66$

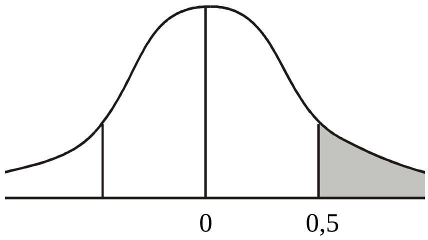
$P(1{,}50 \le x \le 1{,}80) = P(-0{,}33 \le x \le 0{,}66) =$
$= 0{,}1293 + 0{,}2454 = 0{,}3747 \approx 37{,}5\%$



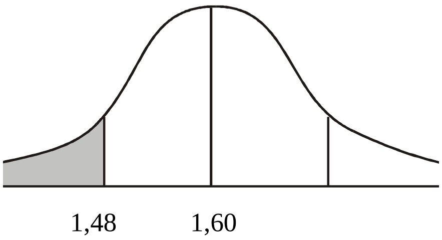


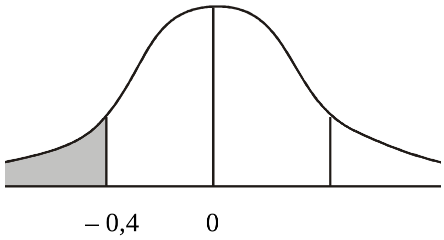
b) $Z = \dfrac{1{,}75 - 1{,}60}{0{,}30} = 0{,}5 \Rightarrow P(X > 1{,}75m) = P(Z > 0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 = 0{,}3085 \approx 31\%$



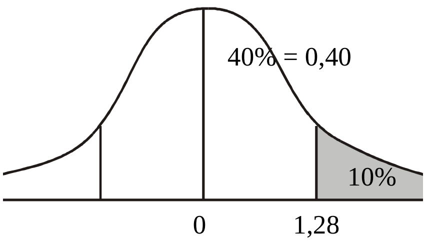


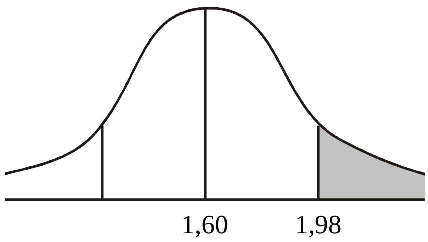
c) $Z = \dfrac{1{,}48 - 1{,}60}{0{,}30} = -0{,}4 \Rightarrow P(x < 1{,}48) = P(x < -0{,}4) = 0{,}5 - 0{,}1554 = 0{,}3446 \approx 34\%$





d) Na tabela $Z_{40\%}$=1,28 $\Rightarrow Z_{40\%} = \dfrac{X - 1{,}60}{030} \Rightarrow X = (1{,}28)(0{,}30) + 1{,}60 = 1{,}98$ m





REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- MARTINS, Gilberto de A. *Estatística Geral e Aplicada*. 3ª ed. São Paulo: Atlas, 2005.
- SPEIGEL, Murray R. *Estatística*. 3ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1993.
- MORETTIN, Luiz Gonzaga. *Estatística Básica – Volume 1 – Probabilidade* – 7ª edição. São Paulo: Pearson Makron Books, 1999.
- BUSSAB, Wilton de O. MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. 5ª edição. São Paulo: Saraiva, 2006.