Sobre a história dos números

Eronildo de Jesus Souza - CEFETBA

Números, numerais e sistemas de numeração

Neste texto, saberemos um pouco da história e do desenvolvimento de alguns conceitos importantes da matemática: numeração, processo de contagem e um dos mais antigos sistemas de numeração, o Egípcio.

História da Numeração

As nossas primeiras concepções de número e forma datam de tempos tão remotos como a inicial da idade da pedra, a era paleolítica. Durante as centenas de milhares de anos (ou mais) deste período, os homens viviam em cavernas, em condições pouco diferentes das dos animais e as suas principais energias eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Eles faziam instrumentos para caçar e pescar e desenvolveram linguagem para comunicação uns com os outros e enfeitavam suas habitações com certas formas de arte criativa.

Pouco progresso se fez no conhecimento de valores numéricos e de relações entre grandezas até que se deu a transição da mera coleta de alimentos para a sua produção; da caça e da pesca para a agricultura.

Com esta transformação fundamental — uma revolução na qual a atitude do homem perante a natureza deixou de ser passiva para se tornar ativa — inicia-se um novo período da idade da pedra: o neolítico.

Durante o neolítico existia uma atividade comercial considerável entre as diversas povoações promovendo a formação de linguagens. As palavras dessas linguagens exprimiam coisas muito concretas e pouquíssimas abstrações.

Não temos dados suficientes para fixar o período da história primitiva em que foram descobertos os números cardinais. Os mais antigos documentos escritos de que dispomos mostram a presença do conceito igualmente na China, Índia, Mesopotâmia e Egito. Todos esses documentos contêm a questão "*Quantos...?*". Esta questão pode ser respondida de forma mais adequada em termos de números cardinais. Portanto, quando esses documentos foram escritos, e provavelmente muito antes dessa época, o conceito de número cardinal já se tinha formado.

O processo de contagem

Em todas as formas de cultura e sociedade, mesmo as mais rudimentares, encontramos algum conceito de número e, a ele associado, algum processo de contagem. Pode-se dizer que o processo de contagem consistia, a princípio, em fazer corresponder os objetos a serem contados com os objetos de algum conjunto familiar (chamado conjunto de contagem): os dedos da mão, do pé, pedras, etc.

Com a necessidade de contagem de uma quantidade maior de objetos (como, por exemplo, o número de cabeças de gado, árvores ou de dias), o homem sentiu que era necessário sistematizar o processo de contagem, e os povos de diversas partes do mundo desenvolveram vários tipos de sistemas de contagem. Estabelecia-se, então, um conjunto de símbolos, juntamente com algumas regras que permitiam contar, representar e enunciar os números. Alguns desses conjuntos continham cinco, outros dez, doze, vinte ou até sessenta símbolos, chamados "*símbolos básicos*".

Hoje, o processo de contagem consiste em fazer corresponder os objetos a serem contados com o conjunto $\{1,2,3,...\}$. Para se chegar à forma atual, aparentemente tão semelhante à anterior, foram necessárias duas grandes conquistas que estão intimamente relacionadas: o *conceito abstrato de número* e *uma representação adequada* para esses.

Para dar uma idéia da dificuldade da questão relativa à representação dos números, lembramos que, a princípio, nossos mais antigos antepassados contavam somente até dois, e a partir daí diziam "muitos" ou "incontáveis" (É fato que, ainda hoje, existem povos primitivos que contam objetos dispondo-os em grupos de dois). Os gregos, por exemplo, ainda conservam em sua gramática uma distinção entre um, dois e mais de dois, ao passo que a maior parte das línguas atuais só faz a distinção entre um e mais de um, isto é, entre singular e plural.

Sistemas de numeração antigos

As linguagens também desempenharam um papel primordial nas mudanças da ênfase matemática da numeração para o número. Do ponto de vista moderno, tende-se a considerar a numeração como ligada a meios de expressar números — isto é, à criação de símbolos para certas idéias. Na abordagem moderna do ensino da matemática elementar, distinguimos desde o inicio numeral de número.

A numeração não posicional precedeu em muito a numeração posicional na maioria das regiões civilizadas do mundo antigo. Uma vez escolhido um conjunto de símbolos básicos, os primeiros sistemas de numeração, em sua maioria, tinham por regra formar os numerais pela repetição de símbolos básicos e pela soma de seus valores. Assim eram, por exemplo, os sistemas egípcio, grego e romano.

Numeração Egípcia

Durante muito tempo, o nosso campo da história da matemática mais rico repousava no Egito, devido a descoberta, em 1858, do chamado *Papiro de Rhind*, escrito por volta de 1650 a.C., mas que continha material ainda mais antigo. Os Egípcios usaram o papiro em uma grande parte dos seus escritos que se conservaram devido ao clima seco. A maior parte dos nossos conhecimentos sobre a matemática egípcia deriva, então, de dois papiros: O *Papiro de Rhind*, que contém 85 problemas, e o chamado *Papiro de Moscou*, talvez dois séculos mais antigo, que contém 25 problemas.

Os Egípcios da Antiguidade criaram um sistema muito interessante para escrever números, baseado em agrupamentos, que consistia em separar os objetos a serem contados em grupos de dez, mas não tinham símbolo para o zero. Portanto, para representar cada múltiplo de dez, eles utilizavam um símbolo diferente dos básicos. Um número era formado, então, pela justaposição desses símbolos, os quais podiam estar escritos em qualquer ordem, já que a posição do símbolo não alterava o seu valor.

No sistema de numeração egípcia os números são representados por símbolos especiais para 1, 10, 100, 1000 e de uma forma aditiva:

1 era representado por uma marca parecida com um bastão | ;

2 era representado por duas marcas || ;

E assim por diante. Veja a figura abaixo

3	4	5	6	7	8	9

Quando chegavam a 10, eles trocavam as 10 marcas |||||||||| por ∩ que indicava o agrupamento.

Feito isto, continuavam até ao 19...

10	11	12	13	14
∩	∩		∩ ||	∩ |||	∩ ||||
15	**16**	**17**	**18**	**19**
∩ |||||	∩ ||||||	∩ |||||||	∩ ||||||||	∩ |||||||||

O 20 era representado por ∩∩.

Tinha-se, então, que até 90..

30	40	...	90
∩∩∩	∩∩∩∩	...	∩∩∩∩∩∩∩∩∩

Para registrar 100, em vez de ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ trocavam este agrupamento por um novo símbolo, que parecia um pedaço de corda enrolada: .

Juntando vários símbolos de cem, escreviam o 200, 300, ..., 900.

Dez marcas de 100 eram substituídas por um novo símbolo, que era a figura da flor de lótus: .

Desta forma, trocando cada dez marcas iguais por uma nova, eles escreviam todos os números de que necessitavam.

Vejamos os símbolos usados pelos egípcios e o que significava cada marca:

Símbolo Egípcio	**Descrição do símbolo**	**O número na nossa notação**
|	Bastão vertical	1
	Ferradura	10
	Rolo de pergaminho	100
	Flor de lótus	1000
	Dedo encurvado	10000
	Peixe	100000
	Homem	1000000

Alguns exemplos:

Para representar 213, os egípcios escreviam:

 |||, ou seja, 100+100+10+1+1+1.

Para representar 2435, os egípcios escreviam:

 |||||.

No entanto, este sistema de numeração pode tornar-se muito trabalhoso em relação à representação de números grandes.

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO ANTIGOS

A história e o desenvolvimento de alguns sistemas de numeração antigos, tais como o Babilônico, o Grego e o Romano são contadas aqui.

Numeração Babilônica

Na Mesopotâmia, numa época anterior ao ano 2000 a.C., pode-se detectar o desenvolvimento de uma matemática mais avançada do que no Egito. Os textos mais antigos, datados do terceiro milênio do último período sumério, revelam já uma grande habilidade para calcular e o uso da base 60 e potências de 60 para contar. Transmitidas, em seguida, aos matemáticos e astrônomos babilônios (sucessores dos sumérios na Mesopotâmia), estes elaboraram um avançado sistema de numeração, legado que nos foi transmitido pelos astrônomos gregos e árabes.

O sistema de numeração babilônico era uma mistura de base dez com base sessenta, no qual os números menores que 60 eram representados pelo uso de um sistema de base 10 simples, por agrupamentos; e o número 60 e os maiores eram designados pelo princípio da posição na base sessenta.

Trata-se de uma tabua de multiplicação por 25, provinda de Susa e datando da primeira metade do II milênio a.C., em que os números considerados são expressos no sistema posicional sexagesimal dos sábios babilônios.

TRANSCRIÇÃO		TRADUÇÃO (sistema posicional decimal)	
1	25	1	25
2	50	2	50
3	1;15	3	75
4	1;40	4	100
5	2;05	5	125
6	2;30	6	150
7	2;55	7	175
8	3;20	8	200
9	3;45	9	225
10	4;10	10	250
11	4;35	11	275
12	5;	12	300
13	5;25	13	325
14	5;50	14	350
15	6;15	15	375
16	6;40	16	400

A notação aditiva tem um grande inconveniente: à medida que números maiores são escritos mais símbolos devem ser introduzidos para representá-los (já que utilizar apenas os símbolos antes empregados torna a representação do número demasiadamente extensa). Entretanto essa dificuldade é superada atribuindo-se importância à posição que um símbolo ocupa na representação de um número.

Enquanto os egípcios indicavam cada unidade mais elevada através de um novo símbolo, os Babilônios usavam o mesmo símbolo, mas indicavam o seu valor pela sua posição. Assim já era o sistema desenvolvido pelos babilônios por volta de 1800 a.C. Estes usavam grupos de 60 elementos e seus símbolos eram combinações de cunhas verticais

(representando a unidade) e angulares

(representando a dezena), dando origem ao que se chama sistema sexagesimal. Ainda hoje utilizamos este sistema ao medir o tempo em horas, minutos e segundos e os ângulos em graus. Um símbolo em uma seqüência fica, então, multiplicado por 60 cada vez que avançamos uma casa à esquerda.

Por exemplo, 1 seguido por outro 1 significava 61 e 5 seguido por 6 e por 3 (5,06,03) significava $5 \cdot 60^2 + 6 \cdot 60 + 3 = 18363$. Este sistema de posição não diferia essencialmente do nosso próprio sistema de escrita de números, em que o símbolo 343 representa $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3$. Tal sistema tinha vantagens enormes para o cálculo, como podemos verificar facilmente ao tentarmos realizar uma multiplicação no nosso próprio sistema e no sistema de numeração romana.

Os babilônios também não tinham um símbolo que representasse o zero, mas nas posições em que ele deveria aparecer era deixado um espaço em branco, ficando a cargo do leitor a tarefa de adivinhar, pelo contexto, o valor correto que estava sendo representado. Observe que um espaço vazio pode conter um ou mais zeros na representação de um número. Por exemplo:  podia tanto representar 1 unidade ou 60 unidades ou 60^2 unidades. A representação do número 25 podia ser facilmente confundida com a de 615 ou de 4305.

Como passar de um número de representação babilônia para a representação árabe? Por exemplo, os números 3,42,09 e 23,37 estão em representação babilônica.

$$3,42,09 = 3 \cdot 60^2 + 42 \cdot 60 + 9 = 13329$$

$$23,37 = 23 \cdot 60 + 37 = 1417$$

Resultam 13329 e 1417 respectivamente na nossa representação decimal (árabe).

Como passar de um número de representação árabe para a representação babilônia?

Por exemplo, para o número 2492 que está representado em nossa notação usual.

Este número está entre 60 e 60^2, portanto vamos dividir 2492 por 60.

$$\begin{array}{r|l} 2492 & 60 \\ \cline{2-2} 092 & 41 \\ 32 & \end{array}$$

Então, $2492_{(10)} = 41,32_{(60)} = 41 \cdot 60^1 + 32 \cdot 60^0$.

Numeração Romana

Roma foi o centro de uma das mais notáveis civilizações da Antiguidade, período que se manteve entre os anos 753 a.C. (data atribuída à sua fundação) e 1453 (data atribuída à queda do Império Romano do Oriente).

Sabe-se muito pouco a respeito da origem da notação romana para números. Os romanos nunca usaram as letras sucessivas de seu alfabeto para propósitos de numeração, como faziam algumas outras civilizações antigas.

Os Romanos utilizaram letras do seu alfabeto para representar números. Como foram senhores de um grande Império, deixaram nos monumentos, pontes, etc. as marcas da sua cultura. Ainda hoje utilizamos a numeração Romana na leitura de datas, nos mostradores dos relógios, etc.

Como funcionava o sistema de numeração Romana?

As 7 letras que os Romanos utilizavam como numerais são mostradas na figura ao lado.

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Repetindo cada símbolo duas ou três vezes (nunca mais que três) o número fica duas ou três vezes maior. Os símbolos V, L e D não se repetem. As letras I, X ou C colocam-se à esquerda de outras de maior valor para representar a diferença deles, obedecendo às seguintes regras:

II	2
III	3
XX	20
XXX	30
CC	200
CCC	300
MM	2000

I só se coloca à esquerda de V ou de X;
X só se coloca à esquerda de L ou de C;
C só se coloca à esquerda de D ou de M;

VII (5+2)	7
XII (10+2)	12
LII (50+2)	52
CX (100+10)	110

Se a um símbolo colocarmos à sua direita um símbolo de menor valor, este último símbolo

IV (5 – 1)	4
IX (10 – 1)	9

soma o seu valor ao valor do outro como na figura ao lado. Se a um símbolo colocarmos à sua esquerda um símbolo de menor valor, este símbolo diminui o seu valor ao valor do outro.

XL (50 – 10)	40
XC (100 – 10)	90
CD (500 – 100)	400
CM (1000 – 100)	900

Cada barra sobreposta a uma letra ou a um grupo de letras multiplica o seu valor por mil.

$\overline{V}$	5000
$\overline{XV}$	15000
$\overline{\overline{IV}}$	4000000
$\overline{L}$	50000

Uma curiosidade:

Os Romanos, freqüentemente, escreviam IIII (4) em vez de IV. Isto, ainda hoje, pode observar-se nas esferas de alguns relógios.

Era comum o uso de numerais romanos em contabilidade em alguns países europeus, bem depois da difusão do moderno sistema indo-arábico. Em 1300, o uso de numerais indo-arábicos era proibido em bancos de certas cidades européias. O argumento era que esses numerais eram mais fáceis de falsificar ou alterar do que os numerais romanos. A numeração romana foi utilizada também na numeração de livros nos países europeus até ao século XVIII.

Numeração Grega

Dos vários sistemas de numeração usados pelos gregos, mencionaremos dois. O mais antigo é conhecido como ático (porque os símbolos ocorrem com freqüência em inscrições atenienses) ou herodiânico (devido ao nome do escritor que o descreveu no século II d.C.) e era usado já no ano 600 a.C. Neste sistema, I era usado para 1, Γ era usado para 5, Δ para 10, H para 100, X para 1000 e M para 10000. Os últimos cinco símbolos são simplesmente as letras iniciais das palavras-número gregas correspondentes, formas que se preservaram no português nos prefixos “penta”, “deca”, “hecto” e “quilo” e na palavra “miríade”. Este sistema usava o princípio aditivo, com qualquer número representado pelo grupo mínimo de símbolos cujos valores somassem o do número.

Algumas fusões foram efetuadas através de combinação de símbolos.

Por volta de 400 e 200 a.C., os gregos utilizavam 27 letras para representar os números, era o sistema jônico aditivo. Mais precisamente era usado um sistema que consistia na separação dos números em grupos de nove elementos, que eram simbolizados por letras: as nove letras iniciais representavam os números de 1 a 9; as nove letras seguintes representavam as dezenas de 10 a 90 e os nove últimos símbolos representavam as centenas de 100 a 900. Assim, temos a seguinte tabela:

A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	K	Λ	M	N	Ξ	O	Π	Ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ρ	Σ	T	Y	Φ	X	Ψ	Ω	Ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Alguns símbolos (isto é, letras) mudaram sua forma com o tempo; os símbolos relacionados com os números 6, 90 e 900 foram abandonados no alfabeto grego de 24 letras, mas permaneceram em uso (com aparências que evoluíram com o tempo) na representação de números.

É interessante observar que aqui também a ordem dos símbolos não altera o valor do número. Para representar 1000, por exemplo, os gregos de então utilizavam um sinal à esquerda do símbolo empregado para representar 1, ou seja, $1000 = {}'\mathrm{A}$ e $3000 = {}'\Gamma$. Vários métodos foram inventados para distinguir palavras de numerais, sendo os mais comuns um acento ao fim do sinal do número ou um traço sobre ele.

O SISTEMA NUMÉRICO INDO–ARÁBICO

Ainda estaremos estudando um pouco dos sistemas de numeração antigos, mas, agora, estaremos interessados em saber como o sistema de numeração moderno (decimal posicional) e os algarismos indo-arábicos se estabeleceram na Europa ocidental (de onde nós, brasileiros, herdamos). Veremos um pouco da numeração hindu, o nascimento dos algarismos arábicos, como estes foram introduzidos na Europa e discutiremos um pouco o que aconteceu na disputa dos abacistas versus algoristas.

Numeração Hindu

A que povo se deve atribuir descobertas tão importantes como as do fogo, da roda, da máquina a vapor – a da numeração moderna?

Durante muito tempo se delegou aos gregos tal desenvolvimento. Longe disto, foi no norte da Índia, por volta do século V da era cristã, que nasceu o ancestral de nosso sistema moderno e foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia.

Os mais antigos espécimes dos numerais utilizados pelos indianos foram encontrados em pilares erguidos na Índia por volta de 250 a.C.

Entretanto, nesses antigos escritos ainda não existe um símbolo para o zero e a notação posicional tampouco é empregada.

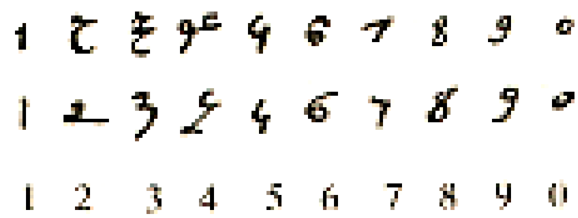
Eles usavam um sistema de numeração com nove símbolos representando os números de 1 a 9 e nomes para indicar cada potência de 10. Por exemplo, escreviam 3 *sata*, 2 *dasan*, 7 para representar o número 327 e escreviam 1 *sata*, 6 para representar 106. A data exata da introdução na Índia da notação posicional e de um símbolo para o zero não é conhecida, mas deve ter sido anterior a 800 d.C., pois o matemático persa Al–Khowarizmi (~780–850) descreve num livro escrito em 825 d.C. um sistema hindu assim complementado.

O nascimento dos algarismos arábicos

Como o império arábico-muçulmano se desagregou muito cedo, no século IX o norte da África e a Espanha já não faziam mais parte do califado de Bagdá. Mas assim mesmo as relações entre as diferentes regiões ocupadas pelos povos de língua árabe não foram rompidas, sobretudo por causa das peregrinações regulares a Meca, do intercâmbio comercial, das guerras, das migrações de populações e das idas e vindas de inúmeros viajantes individuais.

Uma vez conhecida pelos árabes, a aritmética hindu — graças às múltiplas relações desses povos — ganhou também rapidamente todos os “países irmãos” do Magreb e da Espanha. Até então, os calculadores árabes ocidentais haviam se servido de métodos arcaicos. Mas a partir da metade do século IX eles também se tornaram especialistas em “cálculo na areia” e passaram a manejar números elevados com mais facilidade ainda, na medida em que os algarismos e métodos de origem hindu facilitavam a prática de todas as operações aritméticas.

Como no império dos califas, estes algarismos tiveram no início uma forma bastante próxima da grafia hindu de origem. Mas, com a passagem dos séculos, eles evoluíram e assumiram pouco a pouco, nos países mouros, um aspecto bastante diferente da grafia *hindi* de seus primos do Oriente próximo.



É o que os árabes ocidentais denominaram "algarismos *ghobar*", palavra que significa "poeira", por causa da poeira fina com a qual os calculadores costumavam salpicar suas tábuas para traçar os algarismos e efetuar deste modo todo tipo de operações.

Apesar das variações entre os algarismos *hindi* e *ghobar*, percebe-se que a influência hindu ainda é evidente, tanto para uns quanto para outros. Estas diferenças dizem respeito, sem dúvida aos hábitos dos escribas e copistas árabes ocidentais, que desenvolveram um estilo gráfico muito original: a escrita árabe denominada "magrebina", à qual adaptaram os algarismos de origem indiana.

De qualquer modo, é exatamente esta grafia própria dos árabes ocidentais que atingirá os povos cristãos da Europa medieval a partir da Espanha, antes de dar origem aos algarismos que hoje conhecemos. Como os árabes atingiram nesta época um nível científico e cultural superior aos dos povos ocidentais, estes signos receberão por gerações consecutivas a denominação de "algarismos arábicos".

Introdução dos algarismos (hindu) arábicos na Europa

Quando se viram diante da numeração e dos métodos de cálculo vindos da Índia, os árabes souberam apreciar suas vantagens, reconhecer sua superioridade e adotá-los. Ao contrário, os cristãos da

Europa ficaram tão agarrados a seus sistemas arcaicos e tão reticentes diante da novidade que foi preciso esperar durante séculos até que o triunfo do "algoritmo", como era então denominado o cálculo escrito, fosse definitivo e total.

Da queda do Império Romano até o final da Idade Média a "instrução" na Europa foi muito rudimentar. Os raros privilegiados que recebiam algum ensino aprendiam inicialmente a ler e escrever. Depois aprendiam a gramática, a dialética, a retórica e às vezes a teoria musical. Em seguida recebiam aulas muito sumárias de astronomia e geometria. Ao mesmo tempo, lhes ensinavam a contar nos dedos e a escrever e ler os algarismos romanos. Mas não aprendiam mais nada, já que a iniciação à arte do cálculo não chegava a fazer parte do programa.

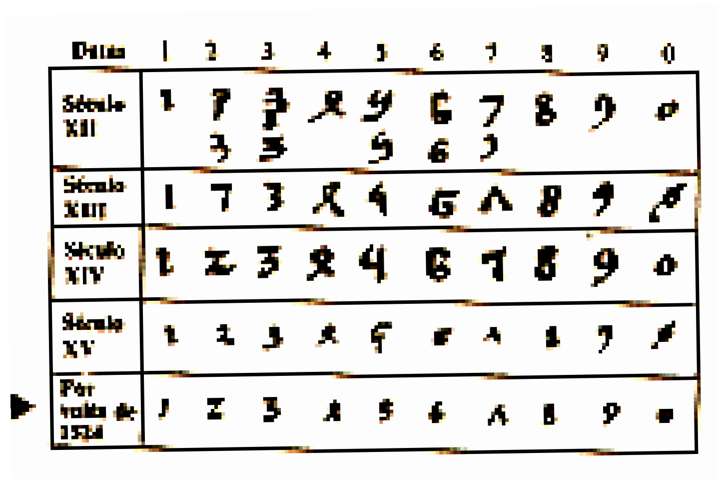
É preciso notar que a prática das operações aritméticas, mesmo as mais elementares não estava nessa época ao alcance de qualquer um. Era o domínio de uma casta muito privilegiada de especialistas, que através dos longos e aborrecidos estudos tinham chegado ao uso misterioso e muito complicado dos velhos ábacos romanos. O grande respeito votado aos calculadores nesta época demonstra a que ponto as técnicas operatórias eram de fato difíceis.

Nesta época, a Itália se encontrava em contato com os árabes e bizantinos e suas escolas tinham rapidamente se especializado em operações complexas, enquanto as universidades francesas e alemãs só se ocupavam, ainda nos séculos XIV e XV, das operações ordinárias. Também, nas administrações européias esta situação permaneceu substancialmente a mesma por períodos consecutivos através da baixa Idade Média e Renascimento, até os séculos XVII e XVIII. No entanto, bem antes da época das Cruzadas já estavam à disposição dos ocidentais as imensas vantagens do cálculo à maneira hindu, que os árabes trouxeram até as fronteiras da Europa a partir do século IX.

Foi preciso esperar o final das Cruzadas, seguido por um abandono das formas precedentes e por um retorno às grafias de origem, para uma estabilização progressiva dos algarismos denominados arábicos.

A partir dos séculos XIII e XIV eles adquiriram a aparência definitiva que hoje conhecemos. Quando aconteceu a invenção da imprensa, em 1440, o próprio Gutenberg não fez nenhuma modificação substancial, limitando-se esta descoberta a fixar a forma desses números de acordo com protótipos bastante determinados e definitivamente adotados...

Por volta de 1524, temos a segunda forma dos algarismos europeus.



De 1095 a 1270, aproximadamente, os poderosos príncipes e cavaleiros cristãos tentaram impor pela espada sua tradição e religião aos infiéis do Oriente. Graças aos inúmeros intercâmbios com a cultura muçulmana, que estas guerras introduziram pelo poder dos fatos, parte do clero das Cruzadas aprendeu o cálculo ao modo de al-Khowarizmi, desenhando os números na areia sem recorrer às colunas do ábaco. Surgiram, assim, os primeiros “algoristas” europeus. Mas, contrariamente aos “abacistas”, estes foram obrigados a adotar o zero e as técnicas do cálculo escrito de origem hindu.

Abacistas versus algoristas

A partir do século XI, a atividade dos tradutores e dos compiladores de obras árabes, gregas ou hindus floresceu na Espanha. Os contatos culturais entre os dois mundos passaram a ser cada vez mais freqüentes. Lenta e irremediavelmente, este período (séculos XII-XIII) trouxe ao conhecimento da Europa as obras de Euclides, Ptolomeu, Aristóteles, al-Khowarizmi, al-Biruni e de muitos outros.

As novas técnicas foram, assim, difundidas por toda Europa. Este movimento foi acentuado no início do século XIII, graças à influência determinante de um grande matemático italiano: Leonardo de Pisa, conhecido como *Fibonacci*, que visitou a África muçulmana e conheceu o Oriente Próximo. Foi ele que encontrou os mestres árabes, que lhe explicaram a fundo seu sistema numérico, as regras do cálculo algébrico e os princípios fundamentais da geometria. Iniciado nesta ciência, ele redigiu em 1202 um admirável tratado que viria a se transformar no breviário de todos os defensores do “algorismo”, contribuindo em grande parte também para a difusão e o desenvolvimento da álgebra.

Tratado que explica todas as regras do cálculo por algarismos na areia, o qual seu autor curiosamente denominou *Líber abaci* (“Tratado do ábaco”), com certeza para evitar a ira daqueles que detinham então o monopólio do domínio numérico e que preconizavam antes de tudo o cálculo no ábaco de fichas.

Em todo o caso, a partir desse momento os entusiastas do cálculo moderno se tornaram cada vez mais numerosos. Era o início do movimento de democratização da matemática na Europa. No entanto, a resistência às novas técnicas ainda era muito forte, os calculadores que praticavam as operações no ábaco queriam conservar para si os segredos dessa arte: preocupados em preservar seu monopólio, vendo seu ganha-pão ameaçado, não queriam ouvir falar desses métodos revolucionários que colocavam as operações ao alcance de todos.

Mas havia também uma razão de ordem ideológica para a resistência à numeração indo-árabe. Desde o renascimento do saber na Europa, a Igreja assumiu de fato o controle da ciência e da filosofia, exigindo que sua evolução se submetesse estritamente à fé absoluta em seus dogmas e que seu estudo se harmonizasse inteiramente com a teologia. Em vez de liberar o espírito curioso, este saber o aprisionou por muitos séculos e está na origem de inúmeras tragédias. Do mesmo modo, determinadas autoridades eclesiásticas espalharam o boato de que, sendo tão fácil e tão engenhoso, o cálculo ao modo árabe devia ter algo de mágico ou até de demoníaco: "tinha que ser coisa do demônio!"

Quando o zero entrou no Ocidente (o que se deu no século XII), várias denominações lhe foram atribuídas, todas elas transcrições mais ou menos latinizadas da palavra *sifr* ("o vazio"), que os árabes tinham atribuído ao *śūnya* de origem hindu. No seu *Líber abaci*, Leonardo de Pisa (1170-1250, aproximadamente) lhe deu o nome *zephirum*, que será usado até o século XV. Depois de algumas modificações, esta palavra chegou ao *zefiro* italiano, que veio dar na nossa palavra *zero* a partir de 1491.

Na época da baixa Idade Média existe uma verdadeira recusa eclesiástica e um endurecimento por parte das castas de calculadores profissionais, recusa que será mantida em vários lugares até o século XV. Na verdade, parece que a Igreja não pretendia favorecer uma democratização do cálculo, que ocasionaria seguramente a perda de seu monopólio em matéria de ensino e, em conseqüência, a perda de poder. Ela preferia que o cálculo continuasse sob alçada exclusiva dos especialistas, que pertenciam quase todos ao clero. Desse modo, os algarismos arábicos ainda ficam proibidos por algum tempo. Os amadores do cálculo moderno são obrigados a usá-los escondidos, como se fosse um código secreto.

A querela entre “abacistas” (defensores dos números romanos e do cálculo em ábaco de fichas) e os “algoristas” (defensores do cálculo por algarismos de origem hindu) durou vários séculos. Mesmo após a vitória dos novos métodos, o uso do ábaco ainda permaneceu. No século XVIII, ele ainda era ensinado, e por prudência as pessoas ainda verificavam todos os cálculos feitos por escrito, refazendo-os no ábaco (de fichas). Foi preciso a Revolução Francesa para resolver a questão e para tornar claro que o “o cálculo por meio dos algarismos tem sobre o cálculo por meio de fichas na tábua de contar as mesmas vantagens que um pedestre livre e sem carga tem sobre um pedestre muito carregado”. Pois foi por causa do peso que o uso do ábaco foi abolido das escolas e administrações.

A partir de então, o cálculo e a ciência moderna puderam desenvolver-se sem entraves. Eles acabavam de abater para sempre seu temível e resistente inimigo...

Entendendo os sistemas de numeração posicional

Atualmente, quase todos os povos do mundo usam o mesmo sistema de numeração, o hindu-arábico (ou indo-arábico), e aproximadamente os mesmos algoritmos para efetuar as operações básicas da aritmética. Este sistema é *decimal posicional*. Ele é decimal, pois faz uso de dez símbolos (chamados *algarismos*): nove para representar os números de um a nove e outro para representar posições vazias ou o número zero. Usamos os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. É posicional, pois todos os números podem ser expressos por meio desses algarismos, que tem o valor alterado à medida que eles avançam para a esquerda na representação do número: cada mudança para a esquerda multiplica seu valor por dez.

A cada sistema de numeração posicional está associado um conjunto de símbolos (algarismos), a partir dos quais escrevemos todos os outros números. Chamamos de *base do sistema* à quantidade destes símbolos. Por exemplo, os babilônios usavam um sistema sexagesimal (isto é, de base 60), os maias usavam um sistema *vigesimal* (de base 20) e hoje utilizamos o sistema decimal, ou seja, de base 10.

A razão de utilizarmos base 10 é convencional e, provavelmente, é conseqüência do fato de quase todos os povos terem usado os dedos das mãos para contar. Temos, então que no nosso sistema todo número pode ser representado por uma seqüência:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \, ,$$

Em que cada algarismo $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. O que cada algarismo representa depende de sua posição nessa seqüência, de acordo com a seguinte regra: cada vez que deslocamos uma casa para a esquerda na seqüência anterior, o valor do algarismo fica multiplicado por 10.

Por exemplo, para representar o número de dias do ano na base 10, o nosso primeiro passo consiste em formar grupos de dez dias, obtendo o seguinte diagrama, em que cada "+" representa um dia e cada "0" indica um grupo de dez dias:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 + + + +
+

Como o número de grupos de dez dias é superior a nove, o nosso próximo passo será repetir o processo anterior, formando novamente grupos de dez:

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	+	+	+	+
+									

Obtemos, assim, três grupos com dez grupos de dez dias, seis grupos de dez dias e cinco dias. Podemos, então, representar o número de dias do ano por 365: o algarismo 3 representa a quantidade de grupos formados por 10 grupos de 10 dias; o algarismo 6 o número de grupos de 10 dias excedentes a estes; e o algarismo 5 representa o numero de dias que sobraram quando da divisão em grupos de dez.

Em outras palavras, como o algarismo 6 está deslocado uma casa à esquerda na seqüência 365, seu valor é de 6 vezes 10, e como o algarismo 3 está deslocado duas casa à esquerda, seu valor é de 3 vezes 10 vezes 10. Isto significa que

$$365 = 3 \cdot 10 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 5 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5$$

Generalizando: se o número de elementos de um conjunto é representado por uma seqüência $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$, esse conjunto tem a_n grupos de 10^n elementos, mais a_{n-1} grupos de 10^{n-1} e assim por diante, até a_1 grupos de 10 mais a_0 elementos; ou seja, ele tem

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \quad \text{elementos.}$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Agora que já conhecemos como os números e os sistemas numéricos de diversos povos surgiram e se estabeleceram, queremos entender a natureza dos diversos “tipos” de número e suas propriedades, tentando responder como surgiram, se estabeleceram e o que os diferencia. Veremos, então, os números naturais, os números negativos, números racionais e os números irracionais.

Introdução

Na história, os números e os conjuntos numéricos não apareceram exatamente do modo como estão descritos nos livros didáticos. Os números naturais e racionais positivos são os tipos de números mais antigos e os inteiros negativos são os mais “jovens” por assim dizer. Através dos tempos, várias simbologias foram utilizadas para descrever números, incidindo, atualmente, na notação indo-arábica em quase todo mundo.

Imagina-se que depois de ter utilizado os números para contar, medir, calcular, o homem começou a especular sobre a *natureza* e *propriedades* dos números. Desta curiosidade nasceu a Teoria dos Números, um dos ramos mais importantes da matemática.

Números naturais

A necessidade de contar objetos levou ao aparecimento do conceito de número Natural. Todas as nações que desenvolveram formas de escrita introduziram o conceito de número Natural e desenvolveram um sistema de contagem. Quando estudamos os sistemas antigos de numeração e as operações que estes permitiam realizar com os números, estávamos estudando os números naturais.

Modernamente, o conjunto dos números naturais é dado por $\{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$, representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Historicamente, imagina-se que tenha surgido naturalmente da necessidade de contagem, que se realiza por meio da operação de "fazer corresponder". A idéia de "correspondência" é uma das idéias básicas de toda a matemática. Contar significa estabelecer uma correspondência, um para um, entre cada item de uma coleção qualquer de objetos e a sucessão de números naturais.

Na sucessão dos números naturais podemos passar de um número para o seguinte juntando-lhe uma unidade. Assim, passamos do 1 para o 2, do 2 para o 3, e, dessa maneira, podemos ir tão longe quanto quisermos, isto é, dado um número n qualquer, por maior que ele seja, podemos sempre obter um número $n+1$, maior do que ele. Este fato exprime-se por qualquer dos seguintes enunciados:

(a) a sucessão dos naturais é ilimitada (não há um número natural maior que todos os outros).

(b) dado um número natural, por maior que ele seja, existe sempre outro maior do que ele.

(c) O conjunto dos números naturais tem infinitos elementos.

Uma das deficiências apresentadas pelo conjunto dos números naturais é a impossibilidade da subtração entre certos seus elementos. Suponhamos que um móvel, partindo de um ponto P sobre uma linha reta e movendo-se sempre com uma velocidade de 1 m/s, siga para a direita durante 5 segundos e retroceda, com a mesma velocidade, durante 8 segundos. Ao fim dos 13 segundos, ele estará numa posição a 3 metros a esquerda do ponto P. Este resultado é impossível de obter no conjunto dos números naturais, pois não existe nenhum número natural que represente o resultado da operação $5-8$.

Numeri absurdi – os números negativos

Devido à deficiência dos naturais em resolver operações do tipo $a-b$ com $b>a$ é que foi ampliado o conjunto dos naturais formando o conjunto dos números inteiros $\{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$, denotado pelo símbolo $\mathbb{Z}$ (da palavra alemã *Zahl*, que significa número).

Na Índia, a necessidade de realizar com maior rapidez os cálculos da astronomia fez com que os sábios hindus se preocupassem em idealizar formas de representação numérica que simplificassem esses cálculos. Os matemáticos hindus se mostraram virtuosos no cálculo aritmético e manipulações algébricas que permitiram conceber um novo tipo de símbolo para representar dívidas que posteriormente o Ocidente chamaria de negativo.

A primeira vez que explicitamente as regras que regem a aritmética com os números negativos apareceram em uma obra foi na obra de Brahmagupta, que data do ano 628 d.C.; esse matemático indiano não só utilizou os negativos em seus cálculos como os considerou entidades separadas e os dotou de uma aritmética concordante com a dos naturais. Muitos séculos se passaram para que o interesse pelos números negativos fosse retomado.

Alguns historiadores escreveram que foram problemas com dinheiro que interpretaram o número negativo como perda. *Negativo* — esta palavra pode ter vindo desta época que eram os valores *negados* quando se obtinha raízes negativas de uma equação.

Diofanto (século III) encontrou muitas vezes com os números negativos. Eles apareciam constantemente em cálculos intermediários em muitos problemas do seu “Aritmetika”. No entanto, havia certos problemas para o qual as soluções eram valores inteiros negativos como, por exemplo, $4 = 4x + 20$. Nestas situações Diofanto limitava-se a classificar o problema de absurdo. Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e, se esses números apareciam nos seus cálculos, eles consideravam-nos falsos ou impossíveis.

Exemplo deste fato seria Michael Stifel (1487–1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de “numeri absurdi”. Cardano usou os números negativos embora os tivesse chamado de “numeri ficti”. A situação mudou (a partir do século XVIII) quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

Foi no Renascimento que apareceu um número negativo ligado a uma equação algébrica, na obra do matemático francês Nicolás Chuquet (1445–1500). Trata-se de seu “Triparty”, escrita em 1484, que contém uma expressão que poderíamos escrever hoje como $4x = -2$. Na época, ainda não eram usados os simbolos "x", "$=$", "$-$".

Simon Stevin (1548–1620) aceita os números negativos como raízes e coeficientes de equações. Admite a adição de $x + (-y)$ em lugar de considerá-la como subtração de y á x. Também tratou de justificar geometricamente a regra de sinais fazendo uso da identidade algébrica: $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$.

O matemático Albert Girard (1590–1639) foi o primeiro a reconhecer, explicitamente, a utilidade algébrica de admitir as raízes negativas e imaginárias como soluções formais das equações, porque ele permitia uma regra geral de resolução na construção de equações através de suas raízes.

Na Época Moderna, mais precisamente no final do século XVII, surgiu a obra de Françoise Viéte. Esta obra, mais tarde ampliada, admitiu que as expressões literais pudessem tomar valores negativos. No entanto, a Álgebra não teria conhecido tal avanço se esta generalização do número não tivesse sido acompanhada por uma descoberta igualmente fundamental, realizada por Viéte (1591) e aperfeiçoada por René Descartes (1637): *a notação simbólica literal*.

A legitimidade dos números negativos deu-se definitivamente por Hermann Hankel (1839–1873) em sua obra “Teoria do Sistema dos números Complexos”, publicada em 1867. Hankel formulou o *princípio de permanência e das leis formais* que estabelece um critério geral de algumas aplicações do conceito de número.

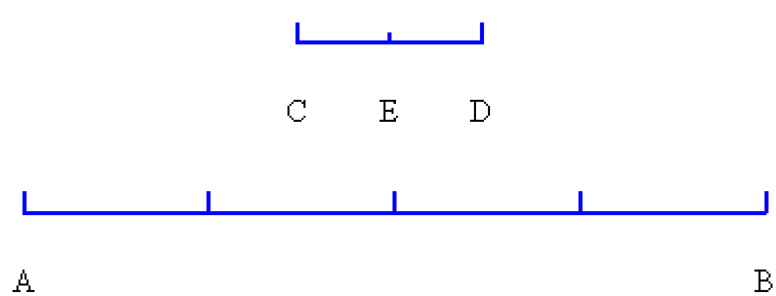
Números racionais

As frações foram conhecidas na antiguidade, mas, na falta de numerações bem constituídas, suas notações foram, durante muito tempo, mal fixadas e inadaptadas às aplicações práticas. Não foram consideradas desde sua origem como números nem se concebia a noção de fração geral $\frac{m}{n}$ como m vezes o inverso de n. Os egípcios, por exemplo, só conheciam as frações denominadas “unitárias” (as de numerador igual a 1) e só exprimiam as frações ordinárias através de somas de frações desse tipo (por exemplo: $\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$).

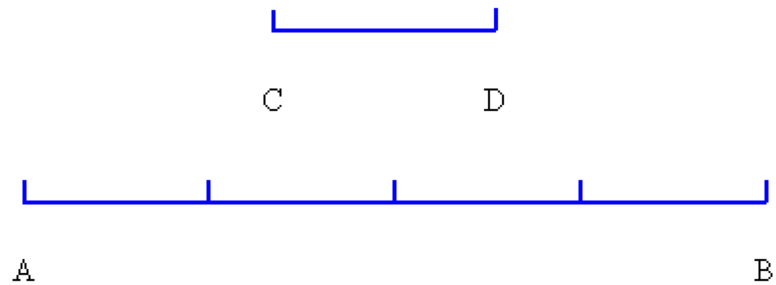
Com o passar do tempo, ficou claro que as frações se submetiam às mesmas regras que os inteiros e que eram, portanto, assimiláveis aos números (sendo um inteiro uma fração de denominador igual a 1). Graças a esta extensão, os números, que outrora serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos. Daí em diante, não só foi possível comparar duas grandezas "por estimação", mas também dividi-las em parcelas ou pelo menos supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie escolhida como padrão. Mas, apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas os antigos não foram capazes nem de unificar a notação de fração, nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

Assim como os números naturais surgiram da necessidade de contar, os números racionais, que são expressos pela razão entre dois inteiros, surgiram da necessidade de medir. Medir é comparar. Para isso é necessário estabelecer um padrão de comparação para todas as grandezas da mesma espécie, por exemplo, 1 cm para comprimentos, 1 segundo para tempo, etc. Este padrão estabelece uma unidade de medida da grandeza (comprimentos, áreas, tempo, etc). Medir, portanto, é determinar quantas vezes a unidade estabelecida cabe, por exemplo, no comprimento que se quer medir. O resultado desta comparação, que é a medida da grandeza em relação à unidade considerada, deve ser expresso por um número.

Na figura abaixo, se considerarmos o segmento CD como a unidade de medida, teremos que o segmento AB mede 4 unidades. Tomando-se CE como unidade, a medida deste mesmo segmento será de 8 unidades.



Só em casos muito especiais a grandeza a ser medida contém um número inteiro de vezes a unidade de medida. O caso mais frequente é o caso da figura abaixo onde, tomando-se a medida *u* do segmento CD como unidade, a medida de AB é maior que 3 *u* e menor que 4 *u*



É claro que neste exemplo, podemos subdividir a unidade em partes menores para que cada uma delas caiba um número inteiro de vezes na grandeza a medir, mas o que se pode dizer da medida de AB em relação à CD? a dificuldade surge porque, neste caso, a medida *m* de AB não é divisível pela medida *u* de CD.

No conjunto dos números inteiros existe a impossibilidade da divisão, isto é, neste conjunto nem sempre é possível expressar o resultado de uma medição ou de uma razão. Para resolver esse problema criou-se um novo conjunto de números, chamado conjunto dos números racionais e denotado pelo símbolo $\mathbb{Q}$ (de quociente). Um número racional *p* é, portanto, aquele que pode ser escrito na forma $p = \frac{m}{n}$, onde *m* e *n* são inteiros e $n \neq 0$. (Lembre-se que a divisão por zero não tem sentido, pois não existe nenhum número que multiplicado por zero seja diferente de 0 e, portanto, expressões do tipo $\frac{3}{0}$ não estão definidas e expressões do tipo $\frac{0}{0}$ são indeterminadas).

Os babilônios, através de sua numeração de posição com base sessenta, foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais (cujo denominador é igual a uma potência de 60) e exprimindo-as mais ou menos como se exprimem as frações de horas em minutos e segundos:

$$33\min 45s = \frac{33}{60}h + \frac{45}{3600}h.$$

Mas os babilônios não chegaram ao uso da “vírgula” para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. A expressão $(33;45)$ tanto podia significar 33h 45 min quanto 0h 33 min 45s. O entendimento ficava estabelecido pelo contexto.

Depois deles, os gregos tentaram atribuir uma notação geral às frações ordinárias, mas sua numeração alfabética complicou muito simbolização, o que os levou a desistir de adotar a notação sexagesimal de origem babilônica em seus cálculos com frações.

A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal posicional chegaram a simbolizar frações mais ou menos como fazemos hoje. Esta notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal.

Em seguida, graças à descoberta das frações “decimais” (aquelas cujo denominador é uma potência de 10) foi pouco a pouco transparecendo o interesse em prolongar a numeração decimal de posição no outro sentido, isto é, em termos modernos, na representação de números “depois da vírgula”. O que permitiu a notação sem nenhuma dificuldade de todas as frações, além de mostrar nitidamente os inteiros como frações particulares: aquelas cuja representação não comporta nenhum algarismo depois da vírgula.

Na Europa, foi o belga Simon Stevin que, em 1582, deu o passo decisivo rumo a nossa notação atual, ao anotar o número 679,567 do seguinte modo:

679(0) 5(1) 6(2) 7(3)

(simbolizando deste modo: 679 unidades inteiras, 5 “unidades decimais de primeira ordem” ou décimos, 6 “unidades decimais de segunda ordem” ou centésimos e 7 “unidades decimais de terceira ordem” ou milésimos).

Dez anos depois, o suiço Jost Bürgi simplificou a notação ao eliminar a menção inútil da ordem das frações decimais consecutivas, colocando no alto das unidades simples o símbolo °: $67\overset{\circ}{9}567$.

No mesmo ano, o italiano Magini substituiu esta bolinha por um ponto colocado entre o algarismo das unidades e o das dezenas. Foi assim que nasceu a notação usada até os dias atuais nos países anglo-saxões: 679.567.

Quanto à nossa vírgula, foi o neerlandês Wilbord Snellius que a inventou, no início do século XVII: $679{,}567$.

As conseqüências desta racionalização da noção e da representação das frações foram incalculáveis em todos os domínios, a começar pela invenção do sistema métrico. Sistema metrológico fundado sobre a base dez, coerente e perfeitamente adaptado ao cálculo numérico. Desenvolvido na Revolução Francesa (1792) em substituição aos velhos sistemas de unidades arbitrárias incoerentes e variáveis.

Números irracionais

A numeração decimal de posição introduziu também a infinita complexidade do universo dos números, e levou os matemáticos a um avanço prodigioso.

Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos, a começar por um certo Pitágoras, já tinham descoberto que a diagonal de um quadrado “não tem medida comum” com o seu lado. De fato, tanto pela medida quanto pelo raciocínio, o comprimento de sua diagonal não corresponde a um número inteiro de metros. Ou seja, uma vez que tal é o seu comprimento matemático, a $\sqrt{2}$ é um número "incomensurável". Foi a descoberta do que hoje denominamos "números irracionais", os que não são nem inteiros nem frações.

Esta descoberta provocou uma grande consternação entre os Pitagóricos, que pensavam até então que "os números regem o Universo", isto é, os inteiros naturais e suas combinações mais simples, as frações ordinárias positivas. O próprio nome destas grandezas é uma prova desde que foram denominadas "inexprimíveis".

A categoria dos números irracionais ficou ainda pouco precisa durante séculos por causa das notações imperfeitas de outrora, que não permitiam a representação destes números de um modo coerente, já que eles eram designados por palavras e valores aproximados aparentemente sem nenhuma relação uns com os outros. Como não era possível defini-los corretamente, constatou-se simplesmente a sua existência, sem poder implicá-los num raciocínio geral.

Beneficiados por uma notação numérica muito eficaz e por uma ciência cada vez mais avançada, os matemáticos europeus dos tempos modernos conseguiram ter sucesso onde seus antecessores tinham falhado. Eles descobriram *que estes números eram identificáveis a números decimais sem fim, cujos algarismos após a vírgula nunca se reproduzem na mesma ordem.*

Alguns exemplos

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097...$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795...$$

(a letra grega "pi" representa a área e também metade do perímetro de um círculo de raio 1.)

$$e = 2,718281828459045235360287471 3...$$

(base do sistema de logaritmos, inventado em 1617 pelo escocês John Neper.)

Descoberta fundamental que permitiu uma melhor compreensão desta categoria de números, já que eles têm por característica esta propriedade.

Se o número é irracional a parte decimal não segue um padrão, isto é, não se repete nunca! Com o auxílio de um computador, podemos calcular a representação decimal de $\sqrt{2}$ e de π com muitas casas decimais para nos convencer deste fato. Embora estes números com suas aproximações vistas em computador com até bilhões de casas decimais sejam convincentes, isto não basta como uma prova matemática. É possível demonstrar logicamente que $\sqrt{2}$ é irracional e também que os números π e e são irracionais.

$\sqrt{2}$ **não é um número racional.** Aristóteles (384–322 a.C.), como exemplo de uma demonstração por redução ao absurdo, demonstrou que $\sqrt{2}$ não é um número racional, isto é, não se pode escrever como uma fração de dois inteiros.

Por absurdo, suponha que existem dois números naturais p e q, primos entre si, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ [isto é, suponhamos a fração $\frac{p}{q}$ pode ser escrita na forma irredutível] e $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Então, $p^2 = 2q^2$, isto implica que p^2 é um número par e, conseqüentemente, p também é par [porque se fosse ímpar teríamos $p = 2k + 1$ para algum número natural k e $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ seria ímpar]. Se p é um número par, existe um natural k tal que $p = 2k$ e assim $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Então q seria par [porque q^2 é par], o que é absurdo visto que p e q são primos entre si.

Depois disso tudo, ainda restava a pergunta:

“o que é número?”

A resposta foi dada (ou construída) no início do século XX à custa de mentes brilhantes, mas esta é uma outra história.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IFRAH, G. **Os números – a história de uma grande invenção,** 2ª. edição. Globo, 1989.

GUNDLACH, B. H. **Tópicos de história da matemática – para uso em sala de aula – Números e numerais e Computação.** Atual editora, 1998.

FERNANDES, A. M. V. [et al.]. **Fundamentos de Álgebra**. Editora UFMG, 2005.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**, 3ª. Edição. Unicamp, 2002.

BOYER, C. B. **História da matemática**, 2ª. Edição. Edgard Blücher, 1998.

MIGUEL, A. & MIORIM, M. A **História na educação matemática – propostas e desafios**. Editora Autêntica, 2005.

DEVLIN, K. **O gene da matemática.** Record, 2004.

DAVIS, P. J. & HERSH, R. **A experiência matemática** – Ciência Aberta/Gradiva, 1ª edição, 1995.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Ciência Aberta – Gradiva, Abril 1992.

KAPLAN, R. **O nada que existe – uma historia natural do zero**. Editora Rocco, 2001.

PINEDO, C. Q. **História da matemática – Notas de aula Nº 5**. CEFET-PR, 2005.

MAOR, E. ***e* : a história de um número**. Record, São Paulo 2003.

FIGUEIREDO, D. G. **Números irracionais e transcendentes**. SBM, 2002. Coleção iniciação cientifica.

LIMA, E. L. **Meu professor de metamática e outras histórias.** Coleção do professor de matemática. SBM, 1991.

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. SBM, 2002.

Cientific American Brasil **As diferentes faces do infinito** – Edição especial, n° 15, 2006.

Sites de consulta

www.educar.sc.usp.br/matematica/

www.netdados.com.br/usuarios/babinho/talesdemileto.html

centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Egipto/papiros.htm www.ifqsc.sc.usp.br/ifsc/grad/curso/licenciatura/trabalhos/introdu.htm

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/

www.uol.com.br/cienciahoje/ch/vol08/infinito

www.terravista.pt/mussulo/1362/historiamat/origneg.htm

www.educar.sc.usp.br/matematica/

http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Egipto/papiros.htm

www.ifqsc.sc.usp.br/ifsc/grad/curso/licenciatura/trabalhos/introdu.htm

www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm36/