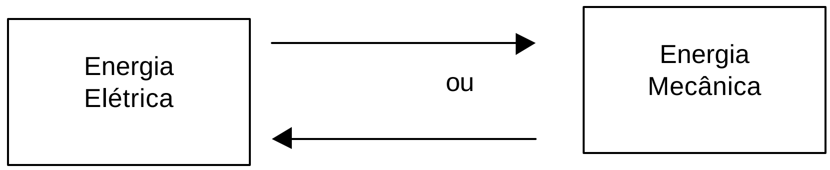
Dispositivos Conversores Eletromagnéticos de Energia

2.1 Introdução

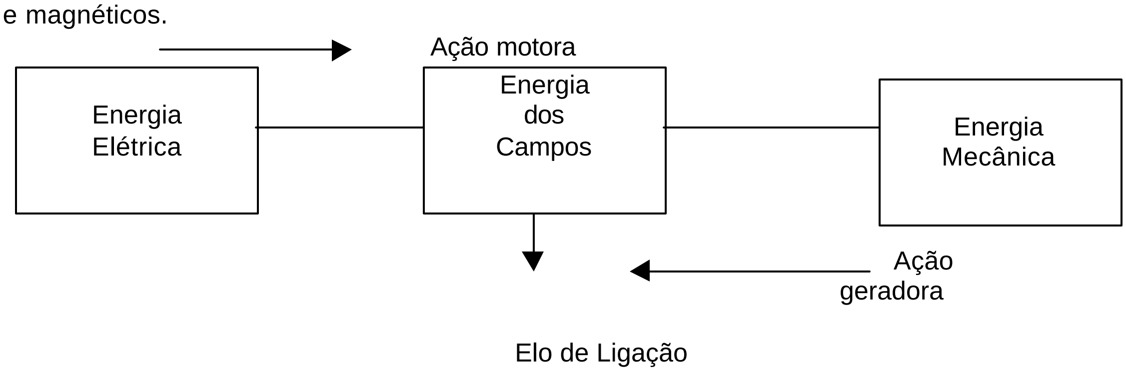
São aqueles que convertem energia elétrica em mecânica e vice-versa.



Exemplo:

- Microfones;
- Alto-falantes;
- Reles eletromagnéticos;
- Instrumentos de medidas;
- Motores e geradores.

O elo de ligação entre estas energias (elétrica e mecânica) é a energia dos campos elétricos e magnéticos.



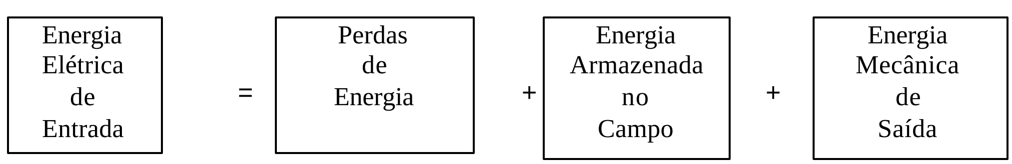
2.2 Conservação de Energia

Um princípio geral, aplicável a todos os sistemas físicos nos quais massa não é criada nem destruída, é o "princípio da conservação de energia, que afirma: energia não é criada nem perdida, ela meramente muda de forma."

Este princípio, justamente com as leis de campos eletro magnéticos, de circuitos elétricos e, a mecânica Newtoniana, é um meio conveniente para determinar as relações características do acoplamento eletromecânico.

A conversão eletromecânica de energia envolve energia em quatro formas e, pela conservação da energia, leva à seguinte relação entre elas.

Ação motora:



$$We = Wp + Wcmp + Wmec \qquad 2.1$$

Ação geradora:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Energia}\\ \text{Mecânica}\\ \text{de}\\ \text{Entrada}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Perdas}\\ \text{de}\\ \text{Energia}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Energia}\\ \text{Armazenada}\\ \text{no}\\ \text{Campo}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{Energia}\\ \text{Elétrica}\\ \text{de}\\ \text{Saída}\end{matrix}\right\}$$

$$We = Wp + Wcmp + Wmec \qquad 2.2$$

Pode-se classificar, ou melhor, enumerar as perdas da seguinte forma:

a) Perdas elétricas – através da resistência dos enrolamentos ($r_{eq}i^2$);
b) Perdas no acoplamento magnético – através do núcleo (Histerese e Foucaut);
c) Perdas Mecânicas – através dos atritos (mancais) e ventilação.

Uma outra representação do sistema anterior, pode ser obtido, levando-se em conta as perdas de energia de acordo com sua procedência, onde o primeiro membro da equação 2.1 é expresso em termos das correntes e tensões no circuito elétrico do dispositivo. A fig. 2.1 mostra essa configuração.

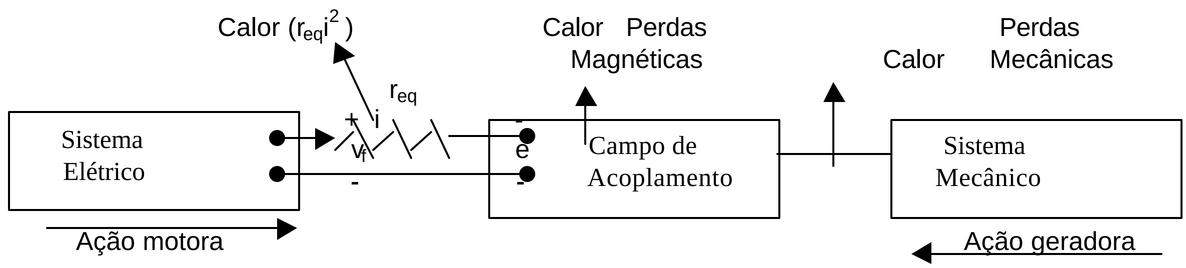


Fig.2.1

Considerando-se o sistema anterior operando como ação motora, o diferencial de energia da fonte elétrica no tempo dt é $v_f idt$ e, a perda de energia na resistência do dispositivo será $r_{eq}i^2dt$.

A energia líquida de entrada será:

$$dW_e=v_f idt-r_{eq}i^2dt$$

$$dW_e=(v_f-r_{eq}i)i^2dt \qquad 2.3$$

E, pela Lei de Kirchhorff, tem-se:

$$v_f-r_{eq}i=e \quad \text{(f.c.e.m ou f.e.m.)} \qquad 2.4$$

Substituindo-se 2.4 em 2.3, tem-se:

$$dW_e=eidt \qquad 2.5$$

Pode-se expressar a equação 2.5, levando-se em consideração a energia de acoplamento magnético mais a energia mecânica, da seguinte forma:

Suponha-se que o sistema seja ideal (sem perdas), então pode-se escrever:

$$dW_{ele} = dW_{cmp} + dW_{mec} \qquad 2.6$$

A equação 2.6 juntamente com as Leis de Faraday e a mecânica Newtoniana são a base fundamental para a análise dos dispositivos conversores de energia.

2.3 SISTEMA MAGNÉTICO DE EXCITAÇÃO ÚNICA

Estudar-se-á neste tópico os dispositivos bobinados com entreferro, entre uma parte fixa e outra móvel, no qual é armazenada considerável energia no campo magnético.

Ex.: relés eletromagnéticos.

2.3.1 TENSÃO INDUZIDA E ENERGIA MAGNÉTICA ARMAZENADA EM UMABOBINA

Seja a fig.3.1

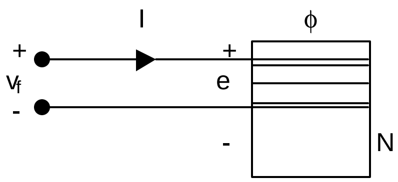


fig.3.1

Pela Lei de Faraday, tem-se:

$$e = d\lambda/dt = N\ d\phi/dt \qquad 3.1$$

O diferencial de energia elétrica de entrada é dado por:

$$dW_{ele} = e.i.dt = i.d\lambda \qquad 3.2$$

Supondo-se que, não haja perdas, toda energia de entrada é armazenada no campo magnético.

$$W_{ele} = W_{cmp} = \int_0^{\lambda} i'.d\lambda' = \int_0^{\lambda} \underline{\Im}/N\ .\ d\lambda' \qquad 3.3$$

A relação entre o fluxo "ϕ" e a f.e.m. é dada pela relutância $\Re$, definidas no cap. I.

2.3.2 FORÇA MECÂNICA E ENERGIA EM UM RELÉ

A fig. 3.2 apresenta um esquema de um relé, onde é mostrado uma fonte elétrica alimentando o dispositivo, bem como, uma força mecânica externa, agindo para manter a armadura no deslocamento "X".

A força produzida pelo campo magnético fcmp é também mostrada na fig. 3.2 e, procura mover a armadura na direção "X".

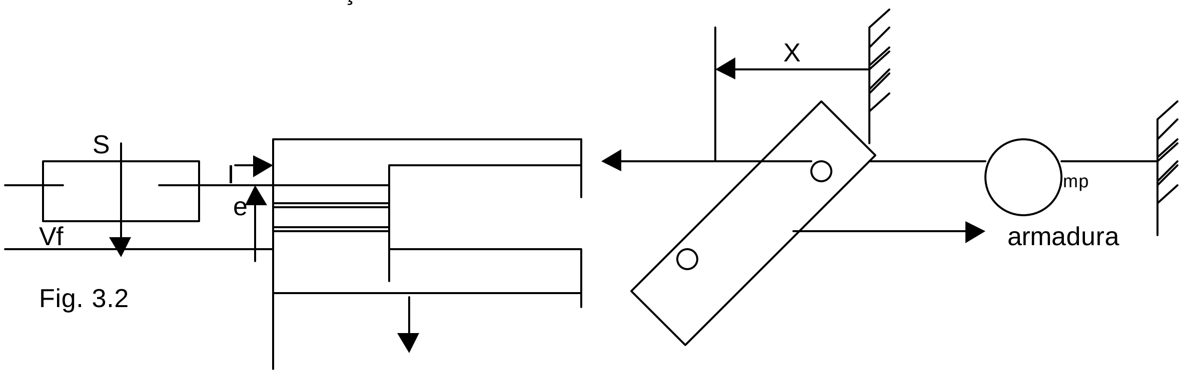


Fig. 3.2

No caso estático e, supondo que não haja forças de atrito, a força no campo e a força mecânica estarão equilibradas.

$$f_{cmp} = f_{mec} \qquad 3.2.1$$

Se permitir à armadura mover-se uma distância "dx", então o campo realiza trabalho sobre a armadura dWmec, isto porque a força e o deslocamento estão no mesmo sentido.

Sabe-se que, para movimento lineares, tem-se:

Energia mecânica = Força x Deslocamento

ou seja, o diferencial de energia mecânica será:

$$dWmec = fcmp.dx \qquad 3.2.2$$

A força mecânica e o deslocamento estão em sentidos opostos, de modo que o trabalho realizado pela fonte mecânica é negativo.

Supondo-se que, não haja aceleração e, a armadura se deslocamento, então pode se escrever:

$$fmec.dx = fcmp.dx = dWmec \qquad 3.2.3$$

Se a armadura estivesse acelerando, ou houvesse uma carga mecânica, então as forças mecânica e do campo não seriam iguais.

Retornado-se às equações 2.6 e 3.2 e levando-se em consideração à eq. 3.2.3, obtém-se:

$$dWele = i.d\lambda = dWcmp + fmec.dx \qquad 3.2.4$$

Se a armadura for considerada estacionária, então dx = 0 e toda variação na energia no campo vem da fonte elétrica, como na eq. 3.2.5.

$$dWcmp = i.d\lambda \qquad 3.2.5$$

Se os fluxos concatenados são considerados estacionários, $d\lambda = 0$, então toda variação na energia no campo vem da fonte mecânica, conforme eq. 3.2.6.

$$dWcmp = -fmec.dx \qquad 3.2.6$$

A condição $d\lambda = 0$ resulta da imposição de tensão nula nos terminais do enrolamento sem resistência. Entretanto pode-se ter um λ finito para assegurar uma força "fcmp"transferidora de energia para o campo a partir dos terminais mecânicos. Por exemplo, pode-se enviar uma corrente i ao enrolamento, mantendo-se o deslocamento fixo "x" da armadura e, curto-circuitando-se os terminais do enrolamento. Para uma indutância constante a energia armazenada magneticamente é dada por $\frac{1}{2}\frac{l^2}{L}$. Se o fluxo é constante, então a energia total no campo é proporcional ao volume do entreferro. Se permitir que "x" aumente, então o volume é reduzido e, a energia fui do campo magnético, de acordo com a eq. 3.2.6.

2.4 FUNÇÃO DE ESTADO, VARIÁVEIS, CO-ENERGIA

Energia é uma função de estado de um sistema conservativo. Da eq. 3.2.4 tem-se:

$$dWcmp(\lambda,x) = i.d\lambda - fmec.dx \qquad 3.2.4$$

Esta equação mostra a energia no campo magnético do dispositivo sem perdas e de excitação única, como função de duas variáveis independentes λ e x. O diferencial da energia dWcmp pode ser expresso matematicamente em termos das derivadas parciais, ou seja:

$$dWcmp(\lambda,x) = \frac{\partial Wcmp.d\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial Wcmp.dx}{\partial x} \qquad 3.3.1$$

Como as variáveis λ e x são independentes, os coeficientes das equações 3.2.4 e 3.3.1 devem também serem iguais, levando às equações paramétricas:

$$i = \frac{\partial Wcmp(\lambda, x)}{\partial \lambda} \qquad 3.3.2 \qquad e \qquad fmec = fcmp = -\frac{\partial Wcmp(\lambda, x)}{\partial x} \qquad 3.3.3$$

A eq. 3.3.2 corresponde à corresponde à eq. 3.2.5 para a energia do campo quando armadura é fixa e dx = 0. A eq. 3.3.3 corrresponde à eq. 3.2.6 para a energia do campo quando o fluxo concatenado é fixo e
dλ = 0. Note-se que a energia sempre foi expressa até agora em termos da variável elétrica "λ". A força na eq. 3.3.3 é obtida como uma função do fluxo concatenado "λ". Uma outra forma de expressar a força é através de outra função de estado, ou seja, a co-energia magnética. A escolha da função de estado é questão de conveniência, ela depende das variáveis que se quer obter no resultado e, da descrição incial do sistema.

A co-energia W'cmp é definida como uma função de i e x tal que:

$$W'cmp(i,x) = i.\lambda - Wcmp(\lambda,x) \qquad 3.3.4$$

Esta expressão é obtida a partir da equação de energia "i.dλ", ou seja:

$$d(i.\lambda) = i.d\lambda + \lambda.di \qquad 3.3.5$$

Aplicando-se o diferencial em 3.3.4, tem-se:

$$dW'cmp(i,x) = d(i,\lambda) - dWcmp(\lambda,x) \qquad 3.3.6$$

Substituindo-se as equações 3.3.5 e 3.2.4 em 3.3.6, tem-se:

$$dW'cmp(i,x) = \lambda.di + fmec.dx \qquad 3.3.7$$

Expressando-se o diferencial da co-energia em função de suas derivadas parciais, tem-se:

$$dW'cmp(i,x) = \frac{\partial W'cmp(i,x)}{\partial i} di + \frac{\partial W'cmp(i,x)}{\partial x} dx \qquad 3.3.8$$

Como as variáveis i e x são independentes, os coeficientes das equações 3.3.7 e 3.3.8 devem ser iguais, resultando nas equações paramétricas.

$$\lambda = \frac{\partial W'cmp(i,x)}{\partial i} \qquad 3.3.9$$

$$fmec = fcmp + \frac{\partial W'cmp(i,x)}{\partial x} \qquad 3.3.10$$

Comparando-se as equações 3.3.3 e 3.3.10, vê-se que a primeira dá a força em termos do fluxo concatenado e a Segunda dá a força em termos de corrente. A escolha da energia ou co-energia para determinação da força, depende geralmente das variáveis que se desejam nas expressões finais.

A co-energia para um sistema de excitação única, quando a posição da armadura é fixa de dx = 0, é obtida da eq. 3.3.7, ou seja:

W'cmp= $\int_0^1 \mathbf{l}.di$ 3.3.11

Para um sistema linear, no qual λ é proporcional a L, a co-energia é dada por:

$$W`cmp = Wcmp = \int_0^i L \cdot i` \cdot di` = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \qquad 3.3.12$$

Exemplo 1

O circuito magnético mostrado na fig. 3.3 é feito de aço fundido.O rotor é livre para girar em torno de um eixo vertical, as dimensões são mostradas na figura.

Deduzir uma expressão, em unidades MKS, para o conjugado no rotor, em termos das dimensões e do campo magnético nos dois entreferros. Desprezar os efeitos de espraiamento. A indução magnética máxima nas porções dos entreferros é limitada a aproximadamente 130 kilolinhas\pol^2 , devido à saturação no aço. Calcular o conjugado máximo em N.m para as seguintes dimensões: r_1 = 1,00pol. , h = 1,00pol. , g = 0,10pol. .

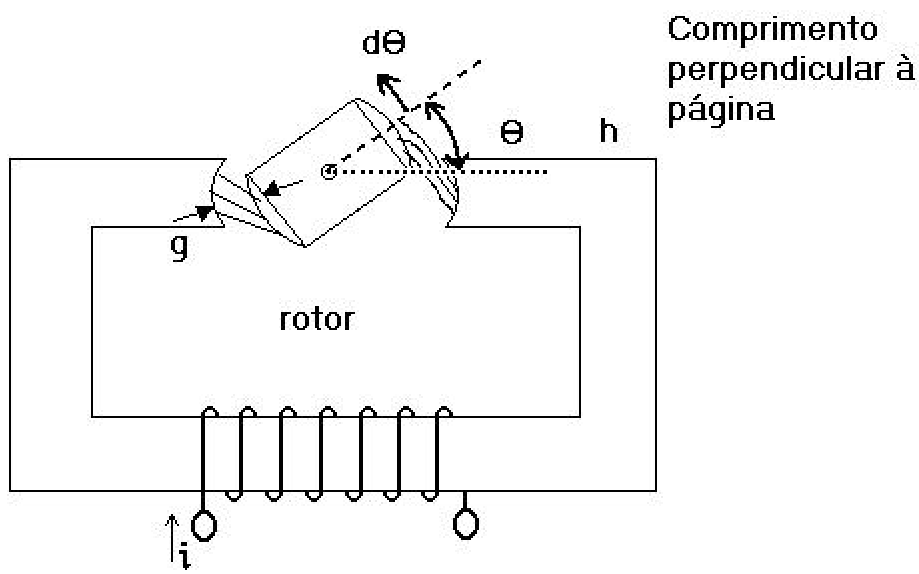
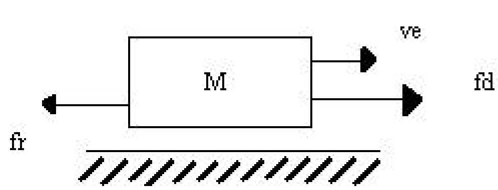


fig.3.3

Apêndice A

No sistema dinâmico com deslocamento linear, a relação entre forças e aceleração é dado por :

$$f_D - f_r = M\frac{dv_e}{dt} \qquad 3.3.13$$



onde:

- fr -força resistente
- f_D - força desenvolvida
- M - massa
- v_e - velocidade

No sistema dinâmico com deslocamento angular, caso do exemplo 1, tem-se:

$$T_D - T_R = J.\frac{dw}{dt}$$

$$T_D - T_R = \frac{2p}{60}\cdot J\cdot\frac{dn}{dt} \qquad 3.3.14$$

onde:

- T_D – torque desenvolvido [N.m]
- T_R – torque resistente [N.m]
- J – momento de inércia [kg.m^2]
- ω - velocidade angular [rad\s]
- n – velocidade linear [rpm]

Por analogia, o torque desenvolvido na região do entreferro, para um dispositivo com excitação única e deslocamento angular é dado por :

$$T_D = \frac{\partial w`cmp}{\partial q}(Hg,q) \qquad 3.3.15$$

ou

$$T_D = -\frac{\partial wcmp}{\partial q}(l,q) \qquad 3.3.16$$

O conjugado " T_D " pode ser obtido através das equações 3.3.3 e 3.3.10 respectivamente.

Apêndice B

A densidade de co-energia para um sistema linear com excitação única é dada por:

$$\frac{W`cmp}{volume} = \int_0^{Hg} B\cdot dH = \int_0^{Hg} m_0\cdot H\cdot dH = \frac{1}{2}m_0 Hg^2$$

Outra forma de calcular a densidade da co-energia é:

Sabe-se que para um sistema linear de excitação única, tem-se:

$$W`cmp=Wcmp=\frac{1}{2}L\cdot i^2$$

Da Lei de Ampère, tem-se:

I =2g . Hg \ N

De indutores, tira-se:

$$L = \frac{m_0\cdot A\cdot N^2}{2g}$$

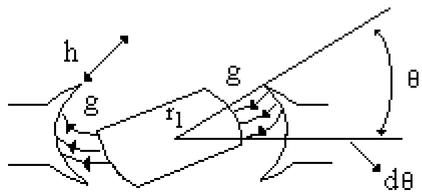
Substituindo-se i e L em Wcmp, fica:

$$W`cmp=\frac{1}{2}\frac{m_0\cdot A\cdot N^2}{2g}\left(\frac{2g\cdot Hg}{N}\right)^2$$

$W'cmp = (2g.A) \,.\, \mu_0.Hg^2/2$

Solução

$T_D \rightarrow W'cmp$
$W'cmp$ = [densidade de $W'cmp$] x [volume entreferro (V_E)]
Cálculo do volume do entreferro



Trabalhar-se-á com a área média (A_M).

$A_M = Arco.h = (r+0{,}5\ g).\theta.\ h$
$V_E = A_M.2g \rightarrow V_E – (r+0{,}5g).\theta.\ h.2g$
$V_E = 2g.h.\theta.(r+0{,}5g)$

$W'cmp = 0{,}5.\ \mu_0.Hg^2\ .(2g.h.\theta).(r+0{,}5g)$

Finalmente:

$$T_D = \frac{\partial \omega'cmp(H,\theta)}{\partial\theta} = g.h.Hg^2\ .(r+0{,}5g).\mu_0$$

b) Converter a indução magnética e dimensões do dispositivo em unidades MKS.

$$Bg = \frac{130000.10^{-8}}{(2{,}54.10^{-2})^2} = 2{,}02\ [Weber/m^2]$$

$g = 0{,}1.2{,}54.10^{-2} = 0{,}00254$ [m]
$h = r_1 = 1{,}00.2{,}54.10^{-2} = 0{,}0254$ [m]
$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$

Substituindo estes valores tem-se:

$$T_D = \frac{0{,}00254.0{,}0254.(2{,}02)^2.(0{,}0254+0{,}5.0{,}00254)}{4\pi.10^{-7}}$$

$T_D = 5{,}59$ [N.m]

2.5 Sistemas de Campo Elétrico de Excitação Única

Um sistema de conversão de energia de campo elétrico pode ser tratado de modo análogo ao caso de campo magnético, na obtenção da força produzida pelo campo elétrico em função da carga ou tensão nos terminais elétricos. A escolha das variáveis independentes determina se a função de estado será a energia ou a co-energia e, também, a forma das equações paramétricas.

2.5.1 Balanço de Energia

Arepresentação de um dispositivo de campo elétrico é mostrado na fig. 4.1. Os terminais elétricos do dispositivo são supridos por uma fonte de conrrente, com um elemento de perda em derivação. A placa móvel é ligada a um sistema mecânico. O fluxo de energia para qualquer variação do sistema pode ser expresso pela eq. 2.6

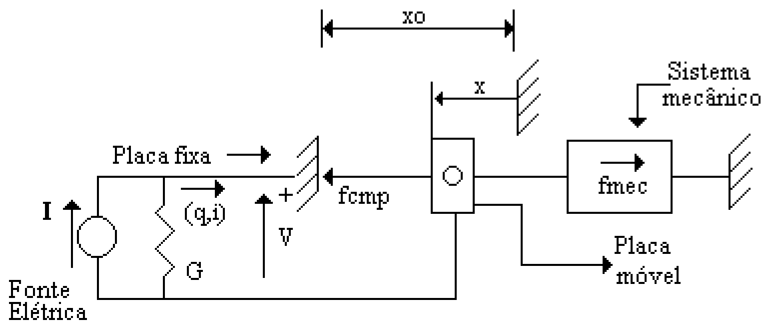


fig. 4.1

dWele = dWcmp+dWmec

Como i e q representam a corrente e a carga para o dispositivo, a energia elétrica entrando nos terminais é:
dWele = v.i.dt = dq 4.1

A energia mecânica do dispositivo é dada por:

dWmec = fmec.dx = fcmp.dx 4.2

Reescrevendo-se a equação 2.6 e levando-se em consideração as equações 4.1 e 4.2, tem-se:

v.dq = dWcmp + fmec.dx ,

ou

dWcmp = v.dq-fmec.dx 4. 3

A energia do campo elétrico pode ser introduzida através dos terminais elétricos ou mecânicos. Se a energia é introduzia pelos terminais elétricos, com terminal mecânico fixo, dx=0, obtém-se:

dWcmp = v.dq 4.4

Se o terminal elétrico for aberto para manter dq=0, a energia será:

dWcmp = -fmec.dx 4.5

Em um sistema linear de campo elétrico, no qual q é proporcional a v, isto é, a permissividade åé constante, a relação entre q e v é definida pela capacitância.

C=q/v

E a expressão da energia é obtida da eq. 4.4.

$$\text{Wcmp} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q.v \qquad 4.7$$

2.5.2 VARIÁVEIS, CO-ENERGIA

A energia do campo elétrico é uma função das variáveis independentes q e x(d).
A consequência da escolha da energia como a função de estado para descrever o sistema é que a fmec será função de q e x. Se a análise do sistema fosse mais conveniente com a força expressa como uma função de v e x, então a co-energia seria selecionada como a função de estado do sistema.
A co-energia é definida como:

W'cmp(v,x) = v.q – Wcmp(q,v) 4.10

Diferenciando-se a eq. 4.10, tem se:

dW'cmp(v,x) = d(v.q) – dWcmp(q,v) 4.11

Substituindo-se a eq. 4.3 em 4.11, obtém-se:

dW'cmp = q.dv + v.dq – v.dq + fmecdx
dW'cmp = q.dv + fmecdx 4.12

A analogia entre os casos de campo elétrico e magnético pode ser vista mais completamente, expressando a densidade de energia como uma função da intensidade de campo elétrico E do vetor deslocamento D = åE. Assim:

$$\frac{Wcmp}{volume} = \int_0^D E'.dD' = \int_0^D \frac{D'}{e}dD'$$

$$\frac{Wcmp}{volume} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{e} \qquad 4.8$$

Onde:

å constante dielétrica [C/v.m] = [Farad/m]
E campo elétrico [v.m]
D densidade de fluxo elétrico entre as placas [C/m ^{2}]
C capacitância [F]

Outra forma de calcular a densidade de Wcmp.

Sabe-se que:

Wcmp = 0,5.q.v = 0,5.C.v^2

Wcmp = 0,5.{A/d).å(E.d)^2

Wcmp = 0,5.(A./d).åd^2.(D/å)^2 = 0,5.(A/å).d.D^2

$$\frac{Wcmp}{(A.d) = volume} = \frac{1}{2}\frac{D^2}{e} \qquad 4.9$$

A co-energia para o sistema anterior, pode ser calculada mantendo-se o terminal mecânico fixo, dx = 0 e, trazendo o sistema até a tensão v, tal que toda co-energia entra através dos terminais elétricos.

W'cmp(v,x) = $\int_0^V q'\,dv'$ 4.13

Para um sistema linar v é proporcional a q e, å é constante, então a eq. 4.13, fica:

W'cmp(v,x) = $\int_0^V C.v'dv' = 0{,}5.C.v^2$ 4.14

2.5.3 FORÇA

A energia no campo é uma função de q e x, seu diferencial em termos das derivadas parciais é:

dWcmp(q,x) = $\frac{\partial \mathrm{Wcmp}}{\partial \mathrm{q}}dq + \frac{\partial \mathrm{Wcmp}}{\partial \mathrm{x}}dx$ 4.15

Os coeficientes das equações 4.3 e 4.15 devem ser iguais, resultando nas equações paramétricas:

v = $\frac{\partial \mathrm{Wcmp}}{\partial \mathrm{q}}(q,x)$ 4.16

e

fmec = fcmp = - $\frac{\partial \mathrm{Wcmp}}{\partial \mathrm{x}}(q,x)$ 4.17

A co-energia é função de v e x, seu diferencial em termos das derivadas parciais é:

dW'cmp(v,x) = $\frac{\partial \mathrm{W'cmp}}{\partial \mathrm{v}}dv$ + $\frac{\partial \mathrm{W'cmp}}{\partial x}dx$ 4.18

Os coeficientes das equações 4.12 e 4.18 devem ser iguais, resultando nas equações paramétricas.

$$\mathrm{q} = \frac{\partial \mathrm{W'cmp}}{\partial \mathrm{v}}(\mathrm{v},\mathrm{x}) \qquad 4.19$$

e

$$\mathrm{fmec} = \mathrm{fcmp} = \frac{\partial \mathrm{W'cmp}(\mathrm{v},\mathrm{x})}{\partial \mathrm{x}} \qquad 4.20$$

Exemplo 2:

Determine a força entre duas placas paralelas, cada uma de área A = 1m^2 e com um campo elétrico entre elas igual a rigidez dielétrica do ar, isto é 3x10^6 [V/m]. Utilizar a co-energia e a energia.

Solução:

Usando-se o modelo da fig. 4.1, o espaçamento entre a placas pode ser tomado como (xo – x) e a capacitância como $C = \frac{A \cdot \varepsilon o}{(xo - x)}$ logo, a energia é dada por:

$$Wcmp(q, x) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}q^2\frac{(xo - x)}{A \cdot \varepsilon o}$$

Cálculo da força em relação à energia:
Da eq. 4.17, tem-se:

$$fmec = fcmp = -\frac{\partial Wcmp(q, x)}{\partial x}$$

$$fcmp = \frac{1}{2}\frac{q^2}{A \cdot \varepsilon o} = \frac{1}{2}\frac{(A \cdot D)^2}{A \cdot \varepsilon o} = \frac{1}{2}A\frac{(\varepsilon o \cdot E)^2}{\varepsilon o}$$

$$fcmp = \frac{1}{2}A \cdot \varepsilon o \cdot E^2$$

$$fcmp = \frac{1}{2}(1) \cdot \left(\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-6}\right) \cdot (3 \cdot 10^6)^2$$

$$fcmp = \frac{1}{8\pi} \cdot 10^9 \text{ [N]}$$

Cálculo da força em relação à co-energia:

$$W'cmp(v, x) = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}\frac{A \cdot \varepsilon o}{(xo - x)}v^2$$

Da eq. 4.20, tira-se:

$$fmec = \frac{\partial w'cmp(v, x)}{\partial x} = \frac{1}{2}A \cdot v^2\frac{eo}{(xo - x)^2}$$

A tensão v é dada por v = E (xo – x)

$$fmec = \frac{1}{2}E^2 \cdot \varepsilon o \cdot A = \frac{1}{8\pi} \cdot 10^9 \text{ [N]}$$

As duas funções de estado produzem a mesma força, como era esperado.
É interessante comparar a força produzida sobre um metro quadrado da superfície que limita um campo magnético, com o exemplo anterior. O valor do campo magnético pode ser tomado como B=1,6 [Weber/m^2], que é um nível de saturação típico para material ferromagnético. A energia em um volume de A = $1m^2$ de área e (xo – x) de comprimento, é dada por:

$$wcmp(\mathbf{B}, x) = \frac{1}{2}B^2\frac{A \cdot (xo - x)}{mo}$$

e a força valerá:

$$fcmp = -\frac{\partial wcmp(B,x)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{B^2 \cdot A}{\mu o}$$

$$\text{fcmp} = \frac{1}{2}\frac{(1{,}6)^2}{4\pi \cdot 10^{-7}} = \frac{0{,}32}{\pi}10^7 \quad \text{[N]}$$

Conclusão:

A densidade de força nas superfícies que confinam num campo magnético é cerca de 25.000 vezes maior do que no caso do campo elétrico, para as intensidade consideradas. Este exemplo mostra porque praticamente todos os dispositivos de conversão de energia utilizam o campo magnético em lugar do campo elétrico, com meio de acoplamento.

Apêndice D.

No exemplo 1 determinou-se o torque em função da intensidade de campo "Hg", não levando-se em consideração para qual deslocamento angular o torque era máximo.

Achou-se uma expressão da seguinte forma:

$$T_D(Hg,\theta) = \begin{cases} \mu o.g \cdot h \cdot Hg^2(r + 0{,}5 \cdot g) \\ \quad ou \\ g.\dfrac{h}{\mu o} \cdot (r + 0{,}5 \cdot g) Bg^2 \end{cases}$$

Não se conhecia o comportamento de Bg em relação a "θ" e, pedia-se o torque desenvolvido máximo para um campo máximo,
então :

TD (Bg ,θ) max = g (h/μo) $Bgmax^2$ (r + 0.5g)

Vamos reformular o problema e determinar para qual posição angular do rotor o torque será máximo.

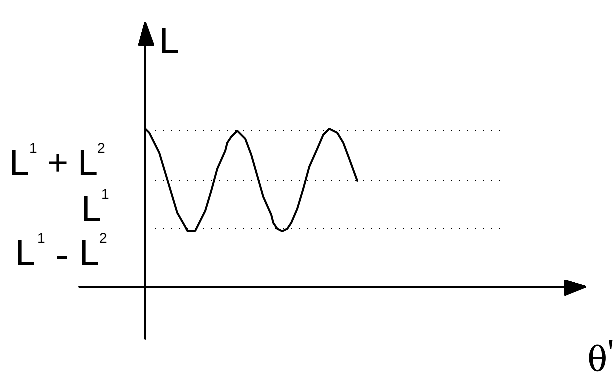
Expressar-se-ào torque em função da corrente e do deslocamento, ou seja, levar-se-à em conta a variação da indutância com o deslocamento angular.

Sabe-se que a co-energia magnética é dada pôr:
w'cmp (i, θ) = (1/2) $L.i^2$

A indutância "L" apresenta um comportamento, conforme ilustrado na figura C, ou seja:

$$L = L_1 + L_2 \cdot \cos 2\theta'$$

fig.C



O torque desenvolvido será:

$$TD(i, \theta) = (\partial/\partial\theta)\,[w'cnp(i, \theta)]\Big|_{i = ctc.}$$

$$TD(i, \theta) = [\partial\,(0.5 \cdot L \cdot i^2)]/\,\partial\theta$$
$$TD = 1/2\, i^2\ \partial L/\partial\theta = 1/2\, i^2\ d(L_1 + L_2 \cdot \cos 2\theta)/\partial\theta$$
$$TD(i, \theta) = -i^2\, L_2 \,\text{sen}\, 2\theta$$

Obs.: O torque oscila senoidalmente.
Pergunta-se:
Para qual "θ" o torque é máximo?

Resposta:

$$dTD/d\theta = \theta \Longrightarrow \cos 2\theta = \theta$$

Para $\theta = \pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, o torque será máximo.

2.6 SISTEMA COM DUPLA EXCITAÇÃO

No sistema com dupla excitação, existem duas bobinas independentes nos quais apresentam em cada qual um fluxo concatenado próprio e, um fluxo concatenado mútuo entre elas.

A fig. 5.1 apresenta o dispositivo magnético de dupla excitação.

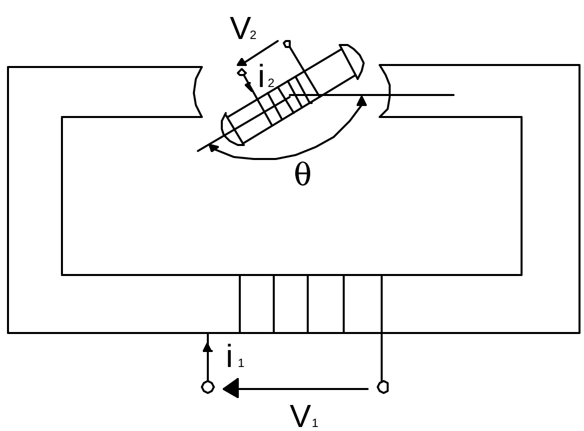


fig. 5.1

Considerar-se-à o sistema totalmente linear, pois caso contrário, um tratamento dessa natureza seria extremamente dificultoso.

Admitindo-se que o sistema seja linear e, sendo o fluxo proporcional à corrente, pode-se aplicar o princípio da superposição.

A fig 5.1 apresenta as correntes, tensões, etc., para um transdutor típico de dupla excitação.

As equações dos fluxos concatenados totais para as duas bobinas são dadas pelas equações 5.1 e 5.2.

$$\lambda_1 = L_1 \cdot i_1 + M \cdot i_2 \qquad 5.1$$
$$\lambda_2 = L_2 \cdot i_2 + M \cdot i_1 \qquad 5.2$$

As equações instantâneas das tensões dos enrolamentos serão:

$v_1 = R_1 . i_1 + d\lambda_1/dt$ 5.3

$v_2 = R_2 . i_2 + d\lambda_2/dt$ 5.4

Substituindo-se 5.1 e5.2 em 5.3 e 5.4, tem-se

$v_1 = R_1 . i_1 + d(L_1 . i_1)/dt + d(M . i_2)/dt$ 5.5
$v_2 = R_2 . i_2 + d(L_2 . i_2)/dt + d(M . i_1)/dt$ 5.6

As indutâncias são independentes das correntes, mas dependem da posição "θ", a qual é função do tempo. Simultaneamente, as correntes são dependentes do tempo.
Expandindo-se 5.5 e 5.6, tem-se:

$v_1 = R_1 . i_1 + L_1 di_1/dt + i_1\, dL_1/dt + M\, di_2/dt + i_2\, dM/dt$ 5.7
$v_2 = R_2 . i_2 + L_2 di_2/dt + i_2\, dL_2/dt + M\, di_1/dt + i_1\, dM/dt$ 5.8

Multiplicando-se 5.7 e 5.8 pôr i_1 e i_2 respectivamente, darão as equações de potência para os enrolamentos .

$v_1 i_1 = R_1 . i_1^2 + L_1\, i_1 di_1/dt + i_1^2\, dL_1/dt + i_1 M\, di_2/dt + i_1 i_2\, dM/dt$ 5.9
$v_2 i_2 = R_2 . i_2^2 + L_2\, i_2 di_2/dt + i_2^2\, dL_2/dt + i_2 M\, di_1/dt + i_1 i_2\, dM/dt$ 5.10

Somando-se 5.9 e 5.10 e integrando em relação ao tempo e, dando-a um aspecto de balanço de energia, tem-se:

$\int(v_1 i_1 + v_2 i_2)dt = \int(R_1 . i_1^2 + R_2 . i_2^2)dt + \int[(L_1 i_1)di_1 + (L_2 i_2)di_2 + (i_1 M)\, di_2 + 2(i_1 i_2)dM + i_1^2\, dL_1 + i_2^2\, dL_2 + (i_2 M)\, di_1]$ 5.11

A energia líquida de entrada é dada pôr :

$Wele = \int(v_1 i_1 + v_2 i_2)dt - \int(R_1 . i_1^2 + R_2 . i_2^2)dt$ 5.12

A Energia armazenada no campo mais a Energia mecânica, fica:

$Wcmp + Wmec = \int [(L1 * i1)di1 + (L2 * i2)di2 + (i1 * M)di2 + 2(i1 * i2)dM + (i2)^2dL1 + (i2 * M)di1]$
5.13

2.6.1 ENERGIA ARMAZENADA NO CAMPO

O valor da energia armazenada instantaneamente no campo magnético depende dos valores das indutâncias e correntes no instante considerado. Esta energia pode ser obtida, considerando-se o transdutor estacionário e, o sistema a ser energizado desde o valor zero até da corrente instantânea requerida. Nesta situação não há energia mecânica (Wmec = 0), ou seja d = 0 os valores das indutâncias são constantes e os termos em dL1, dl2 e dM desaparecem.

Da equação 5.13, obtém-se:

$$\int_0^t dWcmp = \int_0^{i1} (L_1 i'_1) di'_2 + \int_0^{i2} (L_2 i'_2) di'_2 + \int_0^{i1*i2} Md(i'_1\, i'_2)$$
$$Wcmp = 0{,}5 L_1 i_1^2 + 0{,}5 L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad 5.14$$

2.6.2 *TORQUE ELETROMAGNÉTICO*

A equação 5.14 representa a energia armazenada para alguma posição do rotor. Se o transdutor girar, a energia no campo é determinada com respeito ao tempo e dada pela diferenciação em relação ao tempo da 5.14

$$\frac{dWcmp}{dt} = \frac{1}{2}L_1\frac{di_1^{\;2}}{dt} + \frac{1}{2}i_1^{\;2}\frac{dL_1}{dt} + \frac{1}{2}L_2\frac{di_2^{\;2}}{dt} + \frac{1}{2}i_2^{\;2}\frac{dL_2}{dt} + i_1 i_2\frac{dM}{dt} + i_1 M\frac{di_2}{dt} +$$

$$+ i_2 M\frac{di_1}{dt}$$

$$\frac{dWcmp}{dt} = i_1 L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{2}i_1^{\;2}\frac{dL_1}{dt} + i_2 L_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{2}i_2^{\;2}\frac{dL_2}{dt} + i_1 i_2\frac{dM}{dt} + i_1 M\frac{di_2}{dt} + i_2 M\frac{di_1}{dt}$$

5.15

Integrando-se a expressão 5.15 em relação ao tempo, obtém-se:

$$\int dWcmp = Wcmp$$

$$Wcmp = \int\left(L_1 i_1 di_1 + 0{,}5 i_1^{\;2} dL_1 + L_2 i_2 di_2 + 0{,}5 i_2^{\;2} dL^2 + i_1 i_2 dM + i_1 M di_2 + i_2 M di_1\right)$$

5.16

A expressão 5.16 é agora geral para um transdutor em movimento no qual L1, L2, M, i1, i2 são todos variantes com tempo.

Comparando-se as equações 5.13 e 5.16, vê-se que:

$$Wmec = \int\left(0{,}5 i_1^{\;2} dL_1 + 0{,}5 i_2^{\;2} dL_2 + i_1 i_2 dM\right)$$

Geralmente a energia de entrada é dividida igualmente entre as energias armazenadas no campo e para o trabalho mecânico.

$$T_e = T_D$$

$$T_e - T_D = \frac{2p}{60} J \frac{dn}{dt}$$

Para um sistema onde não haja aceleração ou desaceleração o Tc = Tr. Um exemplo disso são sistemas de geração de energia elétrica, ou seja, a freqüência se mantém praticamente constante $\left(\frac{dn}{dt} \cong 0\right)$.

Exemplo 3

Um transdutor rotacional (ver fig. 5.1) tem as boinas do estator e rotor as indutâncias de 0,4[H] e 0,2[H] respectivamente e, uma indutância mútua de 0,2 * cos θ [H], onde θ é o ângulo entre os eixos das bobinas. O valor das correntes em ambas bobinas é 10[A].

a) Determine a energia armazenada no sistema e o torque instantâneo para um ângulo "θ" qualquer.

b) O valor do torque para θ = 30º.

Solução

a) Dados:

$$L_1 = 0,4[H]$$
$$L_2 = 0,2[H]$$
$$M = 0,2\cos\theta[H]$$
$$i_1 = i_2 = 10[A]$$

$$Wcmp = 0,5{i_1}^2 L_1 + 0,5{i_2}^2 L_2 + i_1 i_2 M$$
$$Wcmp = 0,5 \cdot 10^2 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 10^2 \cdot 0,2 + 10 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot \cos\theta$$
$$Wcmp = 30 + 20\cos\theta$$

$$T_e = \frac{dWcmp}{d\theta} = \frac{1}{2}{i_1}^2\frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2}{i_2}^2\frac{dL_2}{d\theta} + i_1 i_2\frac{dM}{d\theta}$$
$$\frac{dL_1}{d\theta} \to 0$$
$$\frac{dL_2}{d\theta} \to 0$$
$$T_e = -i_1 i_2 \cdot 0,2\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$T_e = -20\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Para

$$T_e = 10[N \cdot m]$$

Obs: Quando as correntes são constantes:

$$Wcmp = Wmec$$

Exemplo 4

Um transdutor de dupla excitação, fig. 5.2 tem um rotor cilindro apresentando uma velocidade angular W = 100 [rad/s]. O rotor é energizado através de anéis coletores, tendo uma resistência de 1 ohms e indutância de 0,02 + 0,01 * cos2¬ [H], onde é o ângulo entre os eixos. O estator tem uma resistência de 100 ohms e uma indutância de 0.12[H]. A indutância mútua varia com cos θ e apresenta um valor máximo de 0,06[H]. sendo as correntes do rotor e estator constantes e iguais a 10 e 1 Ampères respectivamente, (obtenha) as expressões instantâneas das tensões, torque e potência de entrada para ângulo de 90° e 45°.

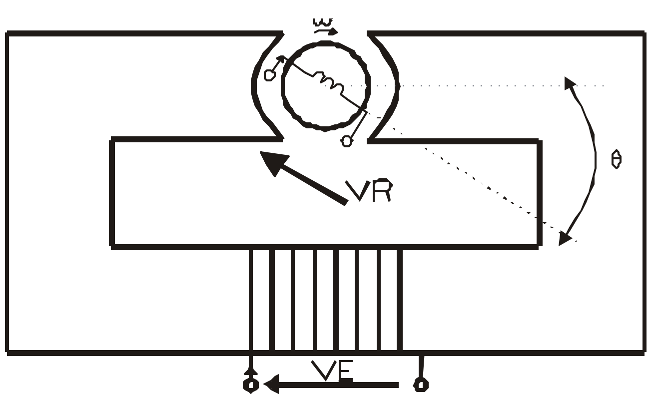


Fig. 5.2 Sistema com dupla excitação

Solução:

Dados:

ω = 100 [rad/s]
Le = 0,12 [H]
Lr = 0,02 + 0,01cos2θ [H]
Re = 100 [Ω]
Rr = 1 [Ω]
ie = 1 [A]
ir = 10 [A]
M = 0,06cosθ [H] = 0,06cos(θt)

LKV nas malhas, obtém-se:

$$v_e = R_e.i_e + L_e \underbrace{\frac{di_e}{dt}}_{0} + M \underbrace{\frac{di_r}{dt}}_{0} + i_r \frac{dM}{dt} + i_e \underbrace{\frac{dL_e}{dt}}_{0}$$

$$v_r = R_r.i_r + L_r \underbrace{\frac{di_r}{dt}}_{0} + M \underbrace{\frac{di_e}{dt}}_{0} + i_e \frac{dM}{dt} + i_r \frac{dL_r}{dt}$$

$$v_e = 100.1 + \omega.10.(-0,06\,sen\,\theta)$$

$$v_e = 100 - 60.sen\,\theta$$

$$v_r = 1.10 + 1.\omega.(-0,06.sen\,\theta) + 10.2.\omega.(-0,01.sen\,2\theta)$$

$$v_r = 10 - 6.sen\,\theta - 20.sen\,2\theta$$

Para $\theta = \pi/2$:

$$v_e = 100 - 60.sen\,(\pi/2) \rightarrow v_e = 40\ [V]$$

$$v_r = 10 - 6.sen\,(\pi/2) - 20.sen\left(2\pi/2\right) \rightarrow v_r = 4[V]$$

Para $\theta = \pi/4$:

$$v_e = 100 - 60.sen\,(\pi/4) \rightarrow v_e = 57,7\ [V]$$

$$v_r = 10 - 6.sen(\pi/4) - 20.sen\left(2\pi/4\right) \rightarrow v_r = -14,23\ [V]$$

Cálculo do torque para correntes constantes:

$$T_e = \frac{dWmec}{d\theta} = \frac{1}{2} i_e^2 \underbrace{\frac{dL_e}{d\theta}}_{0} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta} + i_e\,.\,i_r \frac{dM}{d\theta}$$

$$T_e = \frac{1}{2} 10^2 \cdot (-2 \cdot 0{,}01 \cdot \text{sen } 2\text{è}) + 10 \cdot 1 \cdot (-0{,}06 \cdot \text{sen è})$$

$$T_e = -\text{sen } 2\text{è} - 0{,}6 \cdot \text{sen è}$$

$$T_e = -[0{,}6 \text{ sen è} + \text{sen } 2\text{è}]$$

Para $\text{è} = \text{ð}/2$:

$$T_e = -\left[0{,}6 \text{ sen } (\text{ð}/2) + \text{sen } \left(2p/2\right)\right]$$

$$T_e = -0{,}6 \, [\text{N.m}]$$

Para $\text{è} = \text{ð}/4$:

$$T_e = -\left[0{,}6 \text{ sen } (\text{ð}/4) + \text{sen } \left(2p/4\right)\right]$$

$$T_e = -1{,}42 \, [\text{N.m}]$$

Cálculo da potência de entrada:

$$P_{in} = v_1 \cdot i_1 + v_r \cdot i_e$$

Para $\text{è} = \text{ð}/2$, tem - se :

$$P_{in} = 57{,}7 \cdot 1 + (-14{,}23 \cdot 10) \rightarrow P_{in} = -84{,}6 \, [\text{Watts}]$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1) Um transdutor rotacional (fig. Ex. 1) tem uma relação linear entre fluxo concatenado e corrente. A indutância varia com:

$$L = L_1 + L_2 \cdot \cos 2\text{è}$$

a) Derive a expressão geral do torque, para i constante.

b) Calcule o torque médio se o rotor tem uma velocidade angular constante "ù ". A corrente varia com $I_m \cdot \cos(\text{ù}t + \text{ä})$ e $\text{è} = \text{ù}t$.

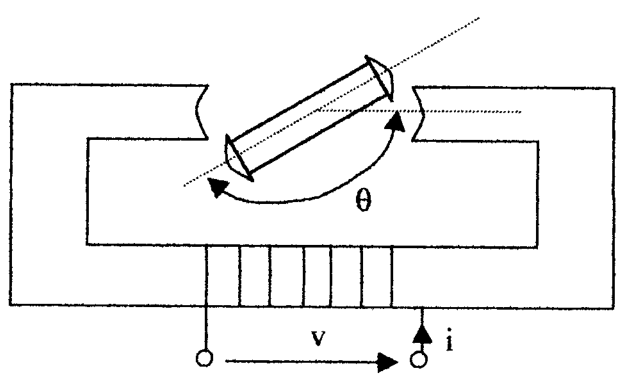


fig. ex. 1

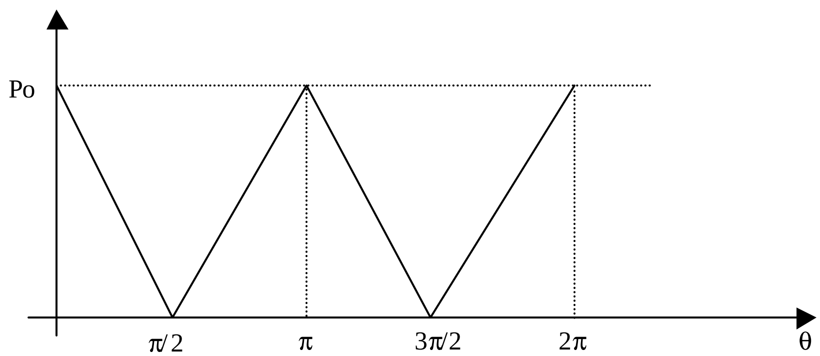
2) Um transdutor rotacional de dupla excitação tem indutâncias próprias do estator e rotor de $04\,[H]$ e $0{,}2\,[H]$ respectivamente e, uma indutância mútua de $0{,}2.\cos è\,[H]$, onde "è" é o ângulo entre os dois eixos. Uma corrente permanente de $10\,[A]$ ocorre nas duas bobinas.

a) Determine a energia armazenada e o torque instantâneo para um ângulo "è" genérico.

b) Considerando um pequeno movimento no rotor de $è = 31^{o}$. Calcule o torque instantâneo em 30º e verifique o valor do balanço de energia.

3) A expressão $T_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dè}$ não é válida para um sistema com simples excitação com relação não linear entre fluxo e corrente. Explique a razão para isto e ilustre sua resposta selecionando uma fórmula para T_e, i, L e $è$.

4) Um transdutor rotacional com simples excitação tem uma permeância característica (conforme fig. Ex. 5), no qual é independente da corrente. Deduza o torque instantâneo para $è = ùt$ e calcule o valor do torque como um motor de relutância energizado por uma corrente $i = I_m \,.\, \mathrm{sen}(ùt + á)$.



5) Um motor monofásico de relutância tem a seguinte relação entre fluxo λ, corrente i e a posição angular $è = ùt$, dado por:

$$i = (A_o - A_1 \,.\, \cos 2è)ë^{1,2}$$

a) Derive a expressão do torque instantâneo.

b) Expresse a variação da corrente, fluxo e torque com o tempo sobre um ciclo, quando a corrente for $I_m \,.\, \cos(è + 30^{o})$.